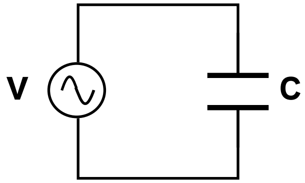
Impedância

Para um sinal sinusoidal, qual é a relação entre a ddp aos extremos de um condensador e a intensidade da corrente que flui? Será a Lei de Ohm válida para um condensador neste caso? O circuito que traduz este problema é:



Num condensador sabemos que a relação geral entre a intensidade da corrente que flui e a ddp aos seus terminais é:

$$i = C\frac{dV}{dt}$$

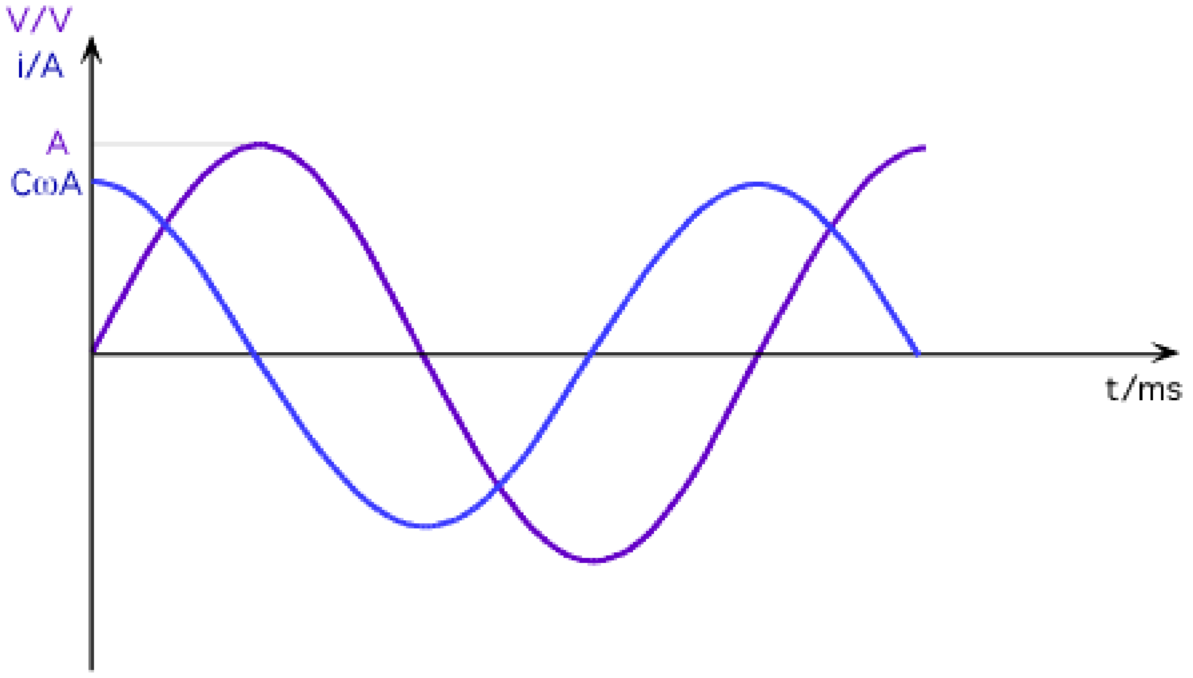
Se a ddp (V) é sinusoidal:

$$V = A \sin(\omega t)$$

então a intensidade da corrente (i) é dada por:

$$i = C\frac{dV}{dt} = C\omega A \cos(\omega t)$$

Se representamos no mesmo gráfico a variação das duas grandezas com o tempo:



constatamos imediatamente que a razão V/ i varia ao longo do tempo e por isso a Lei de Ohm não é válida. Há aqui dois dados que não podem ser condensados num só número. Eles são a razão entre as amplitudes e o desfasamento entre os dois sinais. Ou será que podem?

Vamos insistir nesta ideia e recorrer a um truque habitual em matemática quando pretendemos representar uma função que varia sinusoidalmente. Essa função pode ser descrita de forma complexa. Ou seja o potencial varia de acordo com:

$$V = A\, e^{j\omega t}$$

em que j é um número imaginário puro (utilizamos a letra j em vez de i para não confundir com a intensidade da corrente). A intensidade da corrente eléctrica será então:

$$i = C\frac{dV}{dt} = Aj\omega C\, e^{j\omega t}$$

A razão entre as duas grandezas é:

$$\frac{V}{i} = \frac{A\, e^{j\omega t}}{Aj\omega C\, e^{j\omega t}} = \frac{1}{j\omega C}$$

que é constante. Além disso vemos que conseguimos conjugar num só número os dois dados que pretendíamos - razão entre amplitudes e desfasamento entre os sinais:

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

A razão entre as amplitudes é $\frac{1}{\omega C}$ e o desfasamento é de $-\frac{\pi}{2}$ rad (a intensidade está atrasada em relação à ddp).

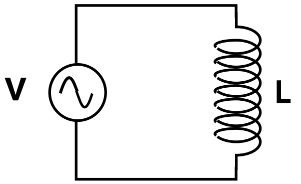
Poderíamos intitular esta grandeza de resistência mas ela só é válida para sinais sinusoidais e é representada por um número complexo. Sendo assim resolveu-se chamar esta grandeza de *impedância* e representá-la pela letra Z. É uma generalização do conceito de resistência.

Dizemos então que a impedância de um condensador é dada por:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Para baixas frequências a impedância é alta e o condensador interrompe o circuito. Para altas frequências a impedância é baixa e o condensador funciona como um curto circuito.

Será que podemos fazer o mesmo para um indutor? Para responder a esta pergunta vamos estudar o seguinte circuito:



Num indutor sabemos que a relação geral entre a intensidade da corrente que flui e a ddp aos seus terminais é:

$$V = L\frac{di}{dt}$$

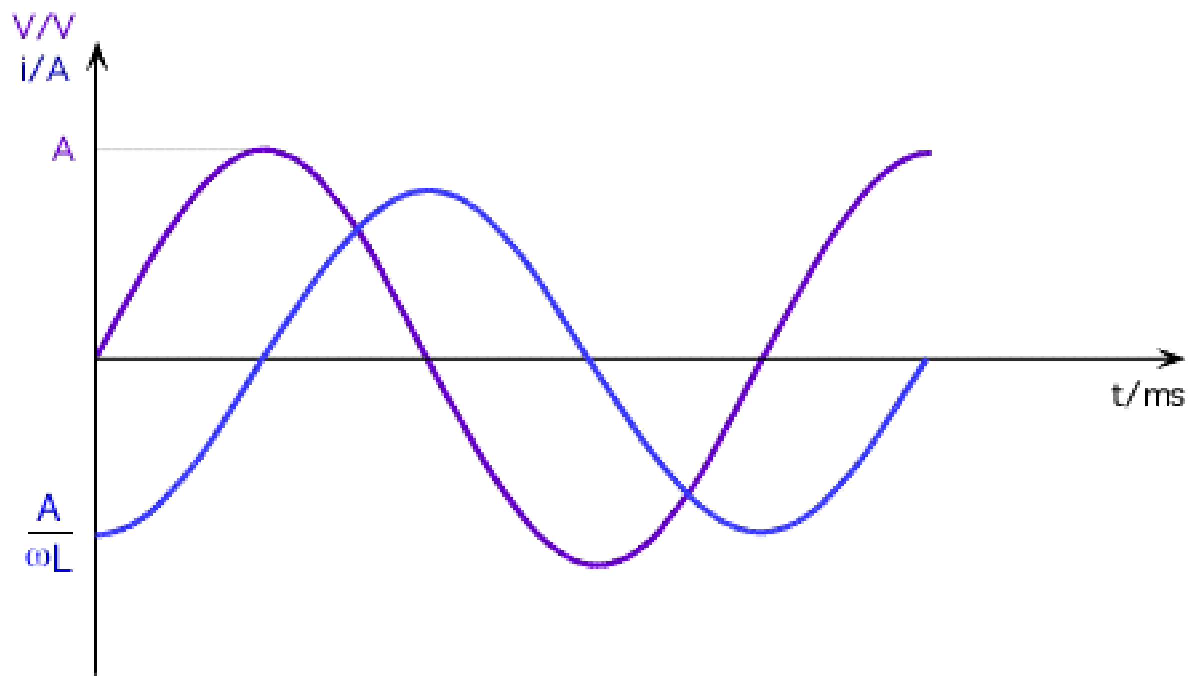
Se a ddp (V) é sinusoidal:

$$V = A \sin(\omega t)$$

então a intensidade da corrente (i) é dada por:

$$i = \frac{1}{L}\int V\,dt = \frac{A}{L}\int \sin(\omega t)\,dt = -\frac{A}{\omega L}\cos(\omega t)$$

Se representamos no mesmo gráfico a variação das duas grandezas com o tempo:



Vamos novamente tentar condensar num número que a razão entre as amplitudes de V e i é ωL e que o desfasamento entre as duas grandezas é de $+\frac{\pi}{2}$. Para tal consideramos que o potencial V varia no tempo de acordo com:

$$V = A\,e^{j\omega t}$$

logo:

$$i = \frac{1}{L}\int V\,dt = \frac{1}{L}\int A\,e^{j\omega t}\,dt = \frac{A}{j\omega L}e^{j\omega t}$$

A razão entre V e i é:

$$\frac{V}{i} = \frac{A\,e^{j\omega t}}{\frac{A}{j\omega L}e^{j\omega t}} = j\omega L$$

A impedância de um indutor é:

$$Z_L = j\omega L$$

Um indutor tem uma impedância baixa para baixas frequências e impedância alta para altas frequências. Ou seja a baixas frequências funciona como um curto-circuito e a altas frequências como circuito aberto.

Podemos confirmar que o desfasamento é $+\frac{\pi}{2}$ porque:

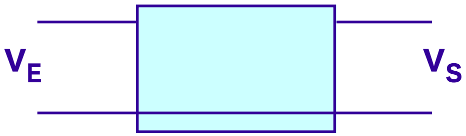
$$j\omega L = \omega L\,e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Circuito de dois portos

Um circuito de dois portos é uma circuito com dois pares de terminais. Um é considerado como entrada do circuito e outro como saída. A variável de entrada pode ser a ddp ou a intensidade da corrente de entrada (V_E ou i_E respectivamente) e a variável de saída pode ser a ddp ou intensidade da corrente de saída (V_S ou i_S respectivamente).

Vamos estudar apenas o caso particular em que a variável de entrada é V_E e a variável de saída é V_S.

Em geral um dos terminais de entrada está directamente ligado a um terminal de saída. Este terminal comum é já nosso conhecido e é designado de massa.



Chama-se ganho do circuito à razão entre os potenciais de saída e de entrada:

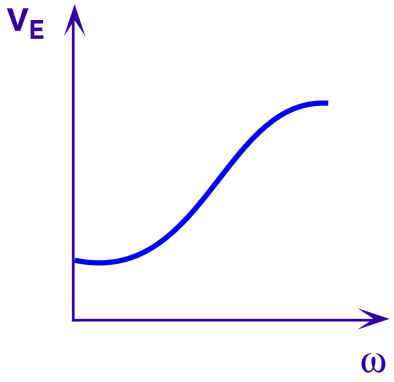
$$G = \frac{V_S}{V_E}$$

Se os potenciais têm uma variação sinusoidal, o ganho é obtidoa a partir da razão entre as amplitudes de saída e de entrada. Nem sempre é possível determinar a razão entre estas grandezas. Neste caso podemos recorrer a um conceito mais geral. A *função de transferência* (f) é a função que relaciona os dois potenciais:

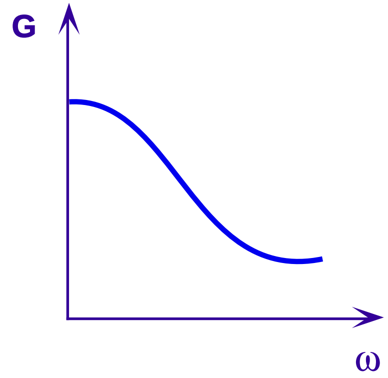
$$V_S = f(V_E)$$

Há circuitos em que o ganho depende da frequência. Esses circuitos têm a designação genérica de *filtros*. Quando temos um circuito com uma soma de sinais sinusoidais, com um filtro podemos realçar as sinusoides de determinada frequência em deterimento de outras.

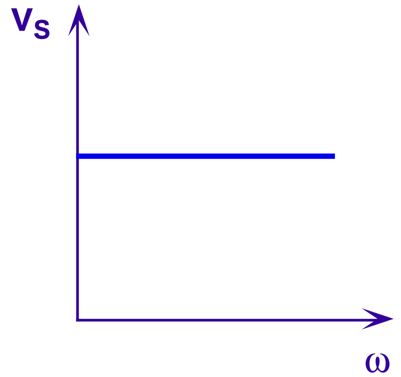
Vejamos um exemplo. Suponhamos que temos um espectro contínuo de frequências como potencial de entrada de um circuito:



Se fizermos esse sinal passar por um filtro em que o ganho tem a seguinte dependência com a frequência:



à saída obtemos um espectro com igual amplitude para todas as frequências:



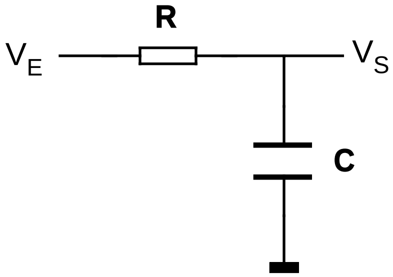
Para obter V_S utilizamos:

$$V_S(\omega) = G(\omega) \cdot V_E(\omega)$$

Existem alguns circuitos clássicos que são estudados como iniciação aos filtros:

O circuito RC como filtro

O primeiro destes circuito é o circuito RC:



É um divisor de tensão com dois componentes: uma resistência e um condensador. Logo, ambos são percorridos pela mesma corrente:

$$C\frac{d}{dt}\left(V_S - 0\right) = \frac{V_E - V_S}{R}$$

Queremos determinar qual o ganho deste circuito e como esse ganho depende da frequência de um sinal de entrada sinusoidal:

$$V_E = V_0 \sin\left(\omega t\right)$$

em que V_0 é a amplitude do sinal de entrada e ω é a frequência angular. Se substituirmos na equação diferencial para o circuito RC:

$$\frac{dV_S}{dt} + \frac{V_S}{RC} = \frac{V_0}{RC}\sin\left(\omega t\right)$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem, linear e não homogénea. O método clássico de resolução desta equação consiste em utilizar uma solução tentativa do tipo:

$$V_S = A\sin\left(\omega t\right) + B\cos\left(\omega t\right)$$

Resolvendo a equação para esta solução determinamos quais são as condições que A e B devem verificar para que a solução seja válida:

$$A\omega\cos\left(\omega t\right) - B\omega\sin\left(\omega t\right) + \frac{A}{RC}\sin\left(\omega t\right) + \frac{B}{RC}\cos\left(\omega t\right) = \frac{V_0}{RC}\sin\left(\omega t\right)$$

A soma dos coeficientes da função seno no primeiro termo tem que ser igual a $\frac{V_0}{RC}$ e a soma dos coeficientes da função coseno no primeiro termo tem que ser igual a 0 (porque no segundo termo não há coseno). Deste facto resulta o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A\omega + \dfrac{B}{RC} = 0 \\ -B\omega + \dfrac{A}{RC} = \dfrac{V_0}{RC} \end{cases}$$

Se resolvermos este sistema a solução é:

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{1+(\omega RC)^2} \cdot V_0 \\ B = -\dfrac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2} \cdot V_0 \end{cases}$$

O potencial de saída é dado por:

$$V_S = \frac{1}{1+(\omega RC)^2} \cdot V_0 \sin(\omega t) - \frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2} \cdot V_0 \cos(\omega t)$$

Podemos ainda modificar esta equação para uma sinosoide só, do tipo:

$$V_S = D \sin(\omega t + \phi)$$

O seno de uma soma obedece à expressão:

$$V_S = D\sin(\omega t + \phi) = D\sin(\omega t)\cdot\cos(\phi) + D\cos(\omega t)\cdot\sin(\phi)$$

Comparando com a solução obtida para o potencial de saída concluimos que:

$$\begin{cases} D\cos(\phi) = \dfrac{1}{1+(\omega RC)^2}\cdot V_0 \\ D\sin(\phi) = -\dfrac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\cdot V_0 \end{cases}$$

Logo:

$$\phi = -\arctan(\omega RC)$$

Também podemos deduzir que:

$$D = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cdot V_0$$

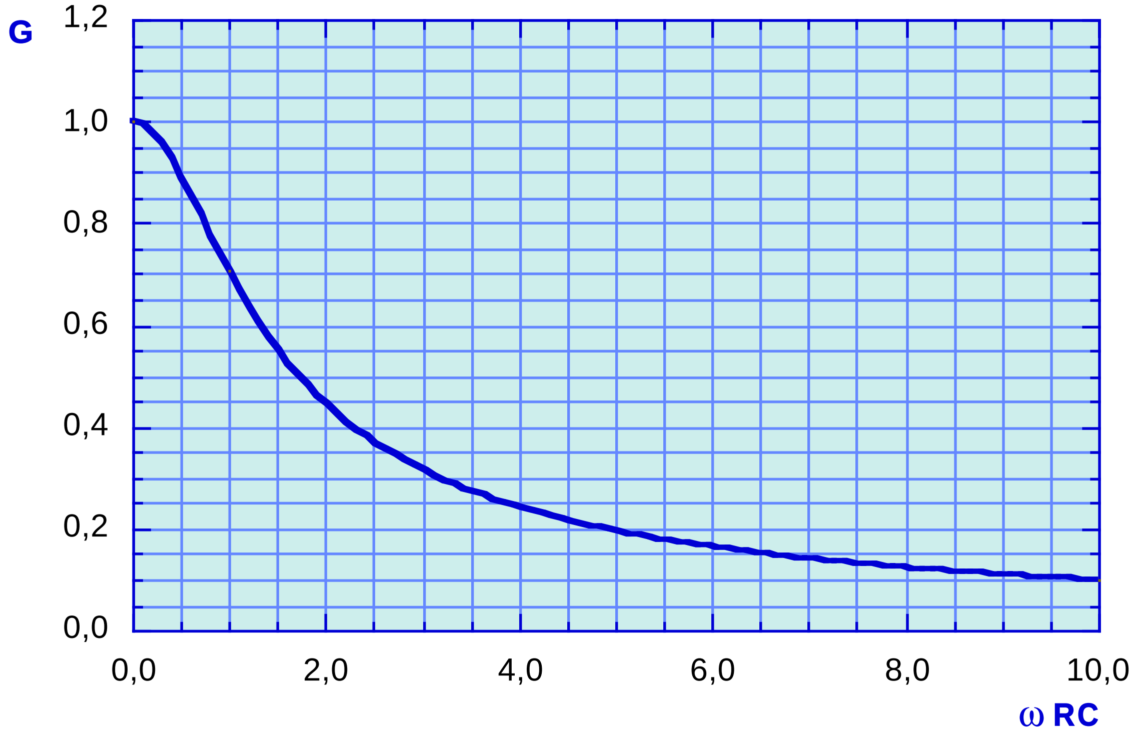
Finalmente concluimos que:

$$V_S = \frac{V_0}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cdot \sin(\omega t - \arctan(\omega RC))$$

O sinal de saída vem desfasado em relação ao original e a sua amplitude depende da frequência. Como definimos, o ganho $G(\omega)$ é a razão entre as amplitudes de saída e de entrada, a sua dependência com a frequência é:

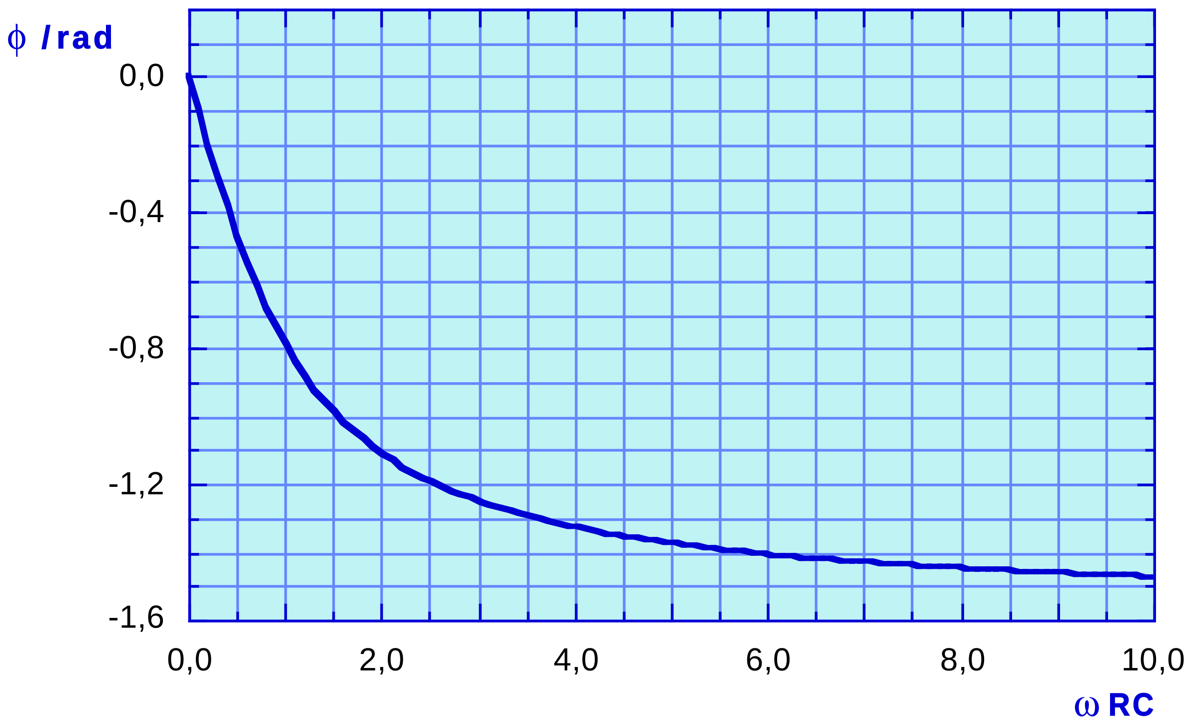
$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

Representemos graficamente:



Para baixas frequências o ganho é praticamente unitário. Para frequências angulares superiores a 1/RC o ganho decresce rapidamente. Este filtro é um passa-baixo (passam as baixas frequências e as altas são fortemente atenuadas). $\omega = 1/RC$ é chamada *frequência de corte*. É por definição a frequência em que a amplitude é atenuada por um factor de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

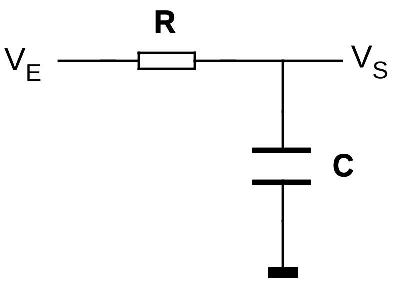
Quanto à diferença de fase ela varia com ωRC de acordo com:



Na frequência de corte o desfasamento é de 45º.

Será que vamos ter que resolver equações diferenciais de cada vez que quisermos analisar o comportamento de um circuito como filtro?

Se utilizarmos o conceito de impedância tornamos os cálculos mais simples e rápidos. Porque é que podemos utilizar este conceito? Porque o sinal de entrada é sinusoidal. Vejamos novamente o circuito RC:



Este circuito é um divisor de tensão logo podemos relacionar os potenciais de saída e de entrada por:

$$V_S = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_E$$

basta pensar que o condensador é como uma resistência de valor $\frac{1}{j\omega C}$.

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} = \left(\frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \right) - j \left(\frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \right)$$

A razão entre as amplitudes é obtida a partir do módulo da razão entre as tensões:

$$\left| \frac{V_S}{V_E} \right| = \left| \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \right| = \frac{|1 - j\omega RC|}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Como número complexo o ganho do circuito pode ser representado da seguinte forma:

$$\frac{V_S}{V_E} = \left|\frac{V_S}{V_E}\right| e^{j\phi}$$

ϕ é a diferença de fase entre os dois sinais.

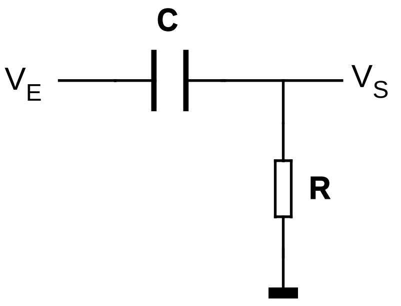
Sendo assim, a diferença de fase entre os dois sinais será:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\dfrac{-\omega RC}{1+(\omega RC)^2}}{\dfrac{1}{1+(\omega RC)^2}}\right) = -\arctan\left(\omega RC\right)$$

Por um processo muito mais simples e rápido chegámos ao mesmo resultado.

O circuito CR

Como funciona o filtro se invertermos a ordem dos dois componentes?



Continuamos a ter um divisor de tensão, logo:

$$V_S = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_E$$

A razão entre as amplitudes é:

$$\left|\frac{V_S}{V_E}\right| = \left|\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}\right| = \left|\frac{\omega RC(\omega RC + j)}{1 + (\omega RC)^2}\right| = \frac{\omega RC\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

e a diferença de fase entre os dois sinais é:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}}{\frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

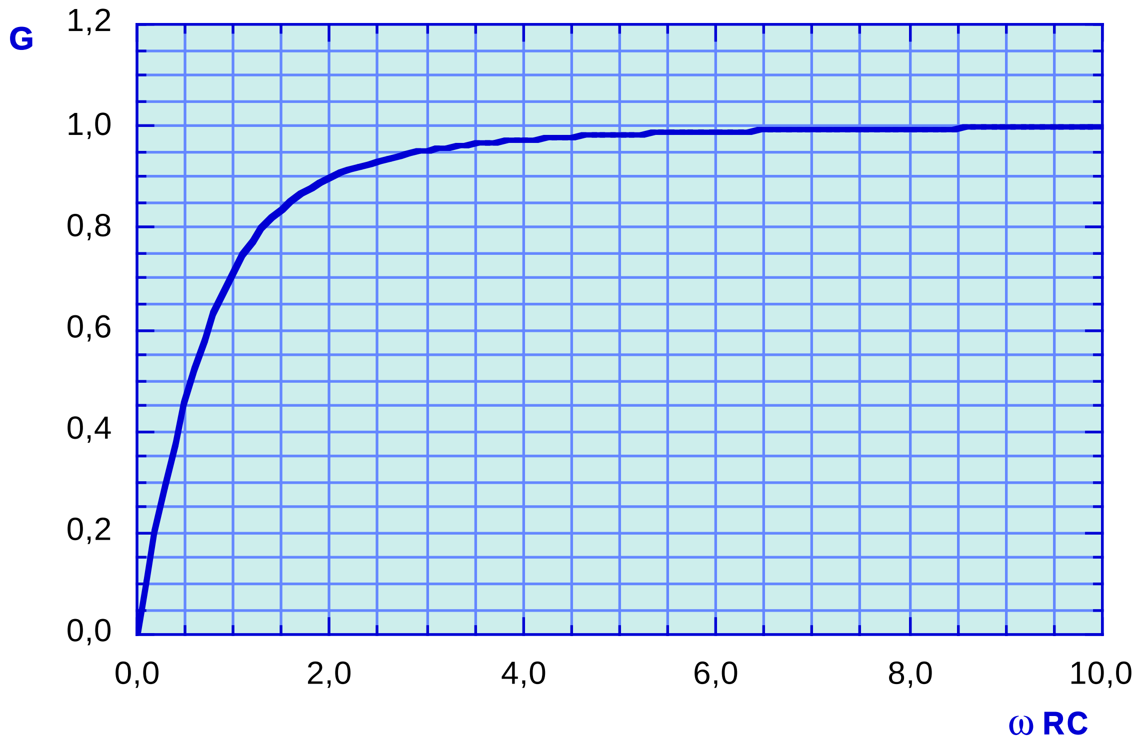
Então, se o sinal de entrada for:

$$V_E = V_0 \sin(\omega t)$$

O sinal de saída será:

$$V_S = \frac{\omega RC \cdot V_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right)$$

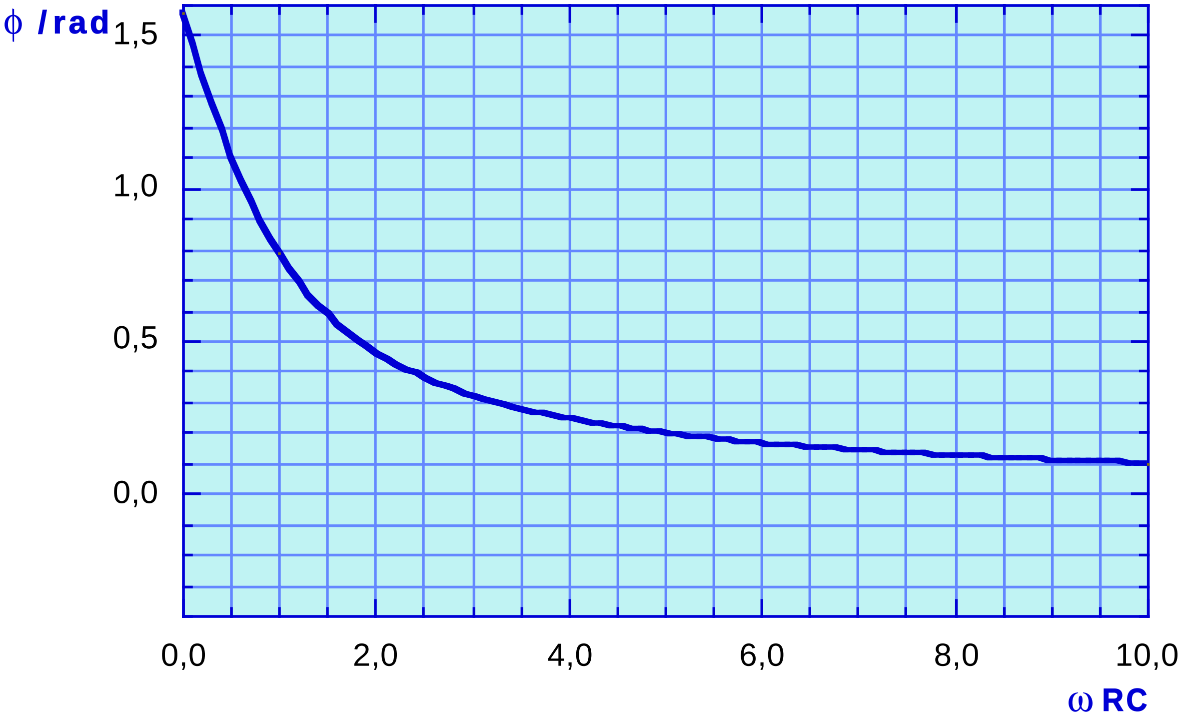
O ganho G(ω) varia com a frequência da seguinte maneira:



Os sinais sinusoidais com baixa com baixa frequência são fortemente atenuados enquanto os de alta frequência mantêm praticamente a amplitude original. Este circuito é um *filtro passa-alto*.

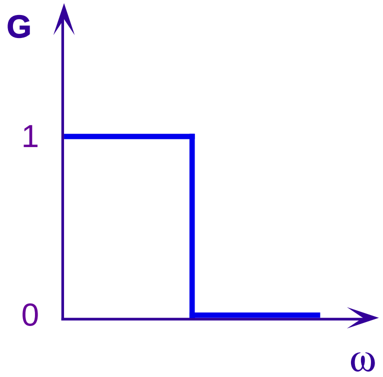
A frequência de corte é por definição a frequência em que a amplitude é atenuada por um factor de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Neste caso o seu valor é também 1/RC.

Quanto à fase a variação é:

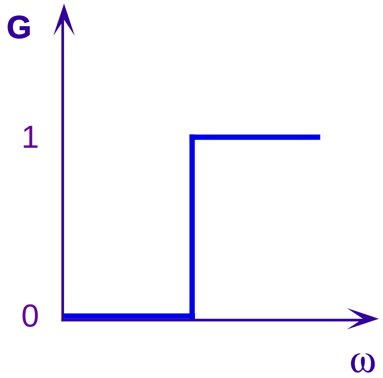

ϕ /rad
1,5
1,0
0,5
0,0
0,0
2,0
4,0
6,0
8,0
10,0
ω RC

Podemos distinguir quatro tipos básicos de filtro ideal:

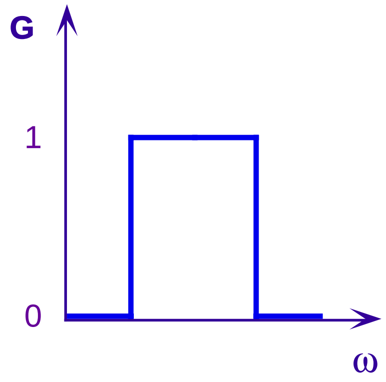
- passa-baixo: tem ganho unitário para frequências até à frequência de corte e ganho nulo para frequências superiores à frequência de corte:



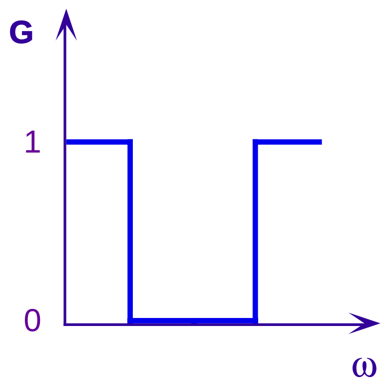
- passa-alto: tem ganho nulo para frequências até à frequência de corte e ganho unitário para frequências superiores à frequência de corte:



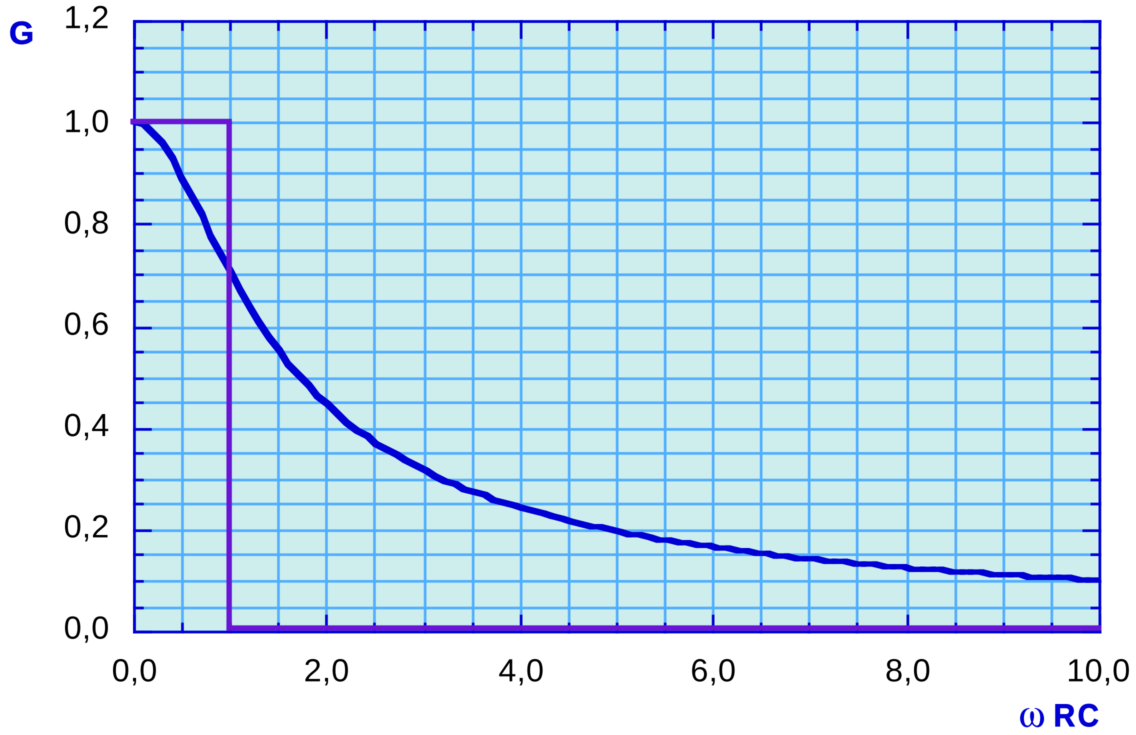
- passa-banda: tem ganho unitário apenas dentro de uma certa banda de frequências. Fora desta banda o ganho é nulo:



- tapa-banda: tem ganho nulo dentro de uma certa banda de frequências. Fora desta banda o ganho é unitário:

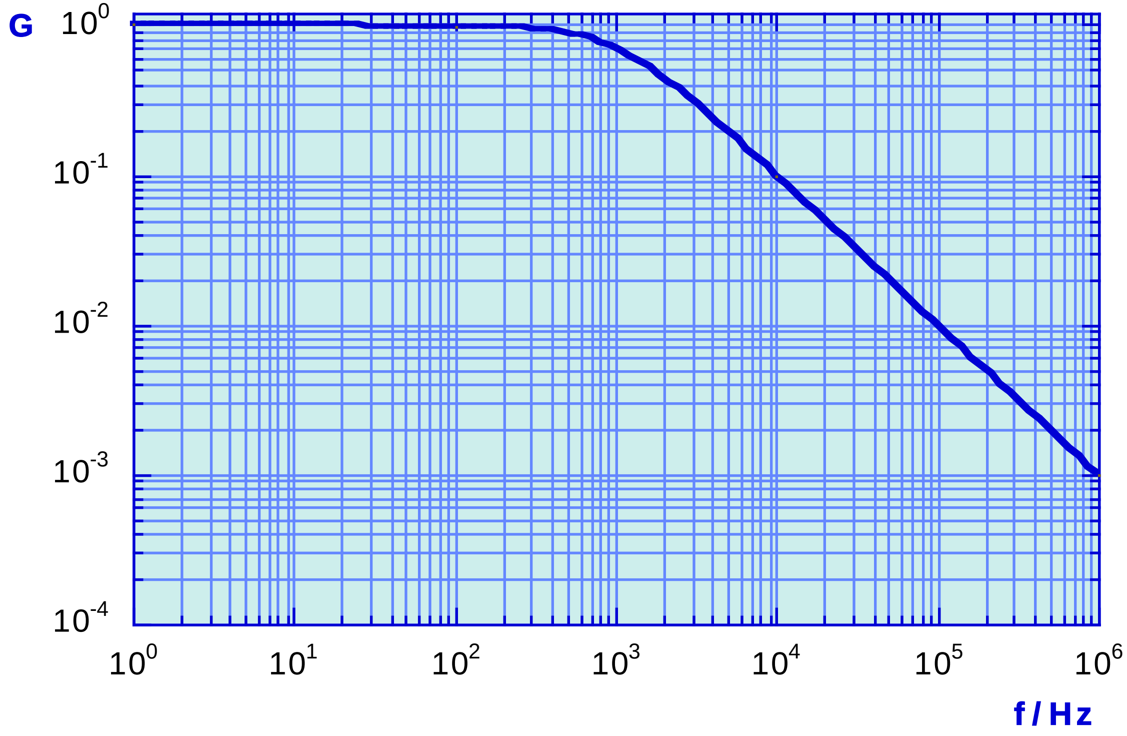


Os filtros que analisámos até agora têm uma variação com a frequência muito mais suave do que o seu equivalente ideal. Por exemplo, se a frequência de corte de um circuito RC (passa-baixo) é 1 KHz, quando o sinal de entrada tem uma frequência de 1,1 KHz, o sinal de saída tem uma amplitude de 67.3% da amplitude inicial. Se o filtro fosse ideal a amplitude de saída era zero:



Estudaremos em Laboratórios II técnicas de nos aproximarmos do filtro ideal.

Na prática, os gráficos de variação do ganho com a frequência têm duas diferenças fundamentais dos gráficos aqui apresentados. Em vez da variável independente ser ωRC ela é a frequência f (Hz). Assim, vemos directamente qual é a frequência de corte do circuito. A segunda diferença é que trabalhamos tipicamente com gamas de frequências entre 1 e 10^6 Hz. Para representar uma gama tão vasta temos que recorrer a escalas logarítmicas tanto do ganho como da frequência. Vejamos o que acontece ao gráfico do ganho de um circuito RC de frequência de corte 1 KHz ($\omega = 6.3 \times 10^3$ rads/s):

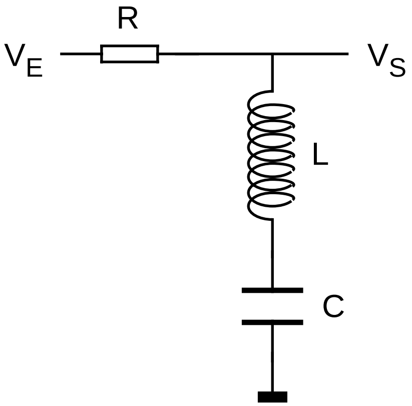


A curva original transformou-se praticamente em dois segmentos de recta. O ponto intersecção das duas rectas identifica a frequência de corte. Com a escala linear teríamos que andar à procura do ponto em que o ganho é 0.707. Estas duas modificações tornam muito mais fácil identificar a frequência de corte a partir do gráfico.

Circuito RLC

O circuito seguinte na sequência clássica de filtros é o circuito RLC. Como o seu nome indica é constituido por três componentes: uma resistência, um condensador e um indutor.

Há várias disposições possíveis destes componentes num circuito. Vamos analisar dois casos. No primeiro os componentes estão em série e o circuito é o seguinte:



Este circuito é um divisor de tensão: aplicamos um potencial sinusoidal à entrada V_E e obtemos um potencial sinusoidal de amplitude inferior à saída V_S.

Utilizando o conceito de impedância e aplicando a esta situação, os dois potenciais podem ser relacionados por:

$$V_S = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot V_E$$

A expressão é modificada para que o número complexo fique do formato a+jb:

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{-\omega^2 LC + 1}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = \frac{\left(1-\omega^2 LC\right)\left(1-\omega^2 LC - j\omega RC\right)}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC\right)^2}$$

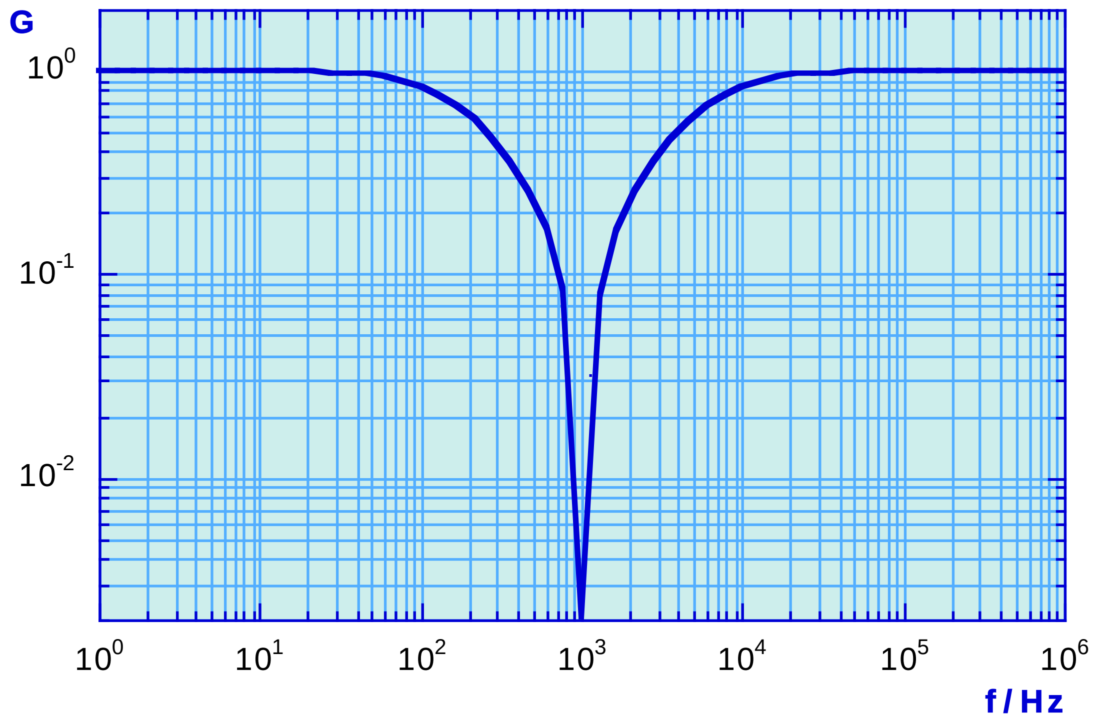
A razão entre as amplitudes é obtida a partir do módulo desta quantidade:

$$\left|\frac{V_S}{V_E}\right| = \frac{\left|1-\omega^2 LC\right|}{\sqrt{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC\right)^2}}$$

e o desfasamento entre os sinais é:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega RC}{\omega^2 LC - 1}\right)$$

Representemos graficamente a variação do ganho com a frequência para um circuito em que R = 1KΩ, C = 1μF, L = 25 mH:



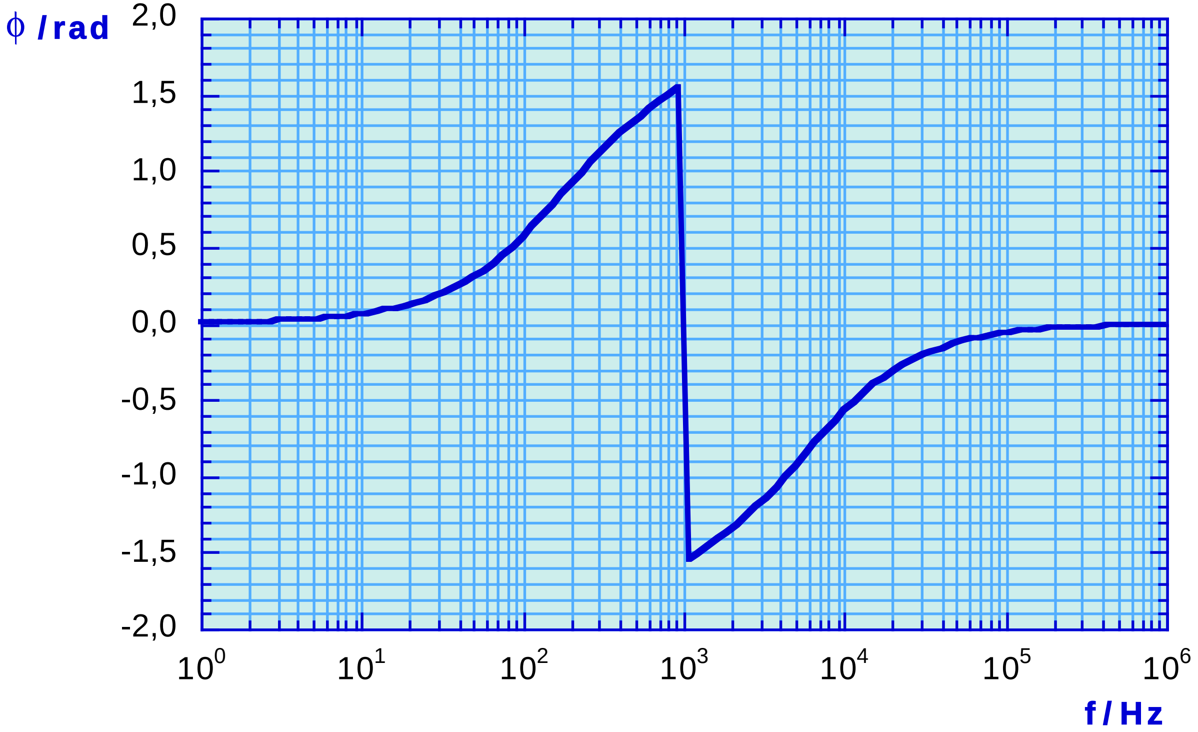
Vemos imediatamente que trata-se de um filtro tapa-banda. O ganho só é nulo para uma frequência, aquela que verifica a condição:

$$1-\omega^2 LC = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Por isso a frequência central da banda atenuada é determinada pelo condensador e pelo indutor. A largura da banda é determinada pelos valores da resistência e do condensador, devido ao termo $(\omega RC)^2$.

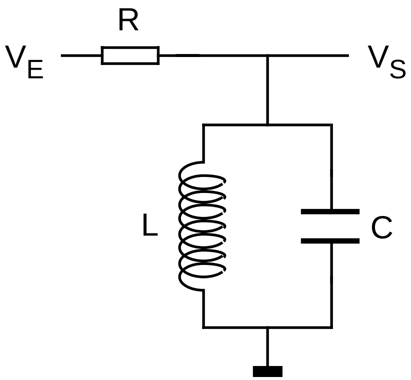
O desfasamento entre os dois sinais neste caso tem a seguinte variação com a frequência:



Os sinais de frequência de passagem praticamente não sofrem desfasamento, mas à medida que a frequência se aproxima da banda de atenuação o desfasamento tende para $\pm\pi/2$.

No laboratório obtemos resultados que se aproximam tanto mais destes quanto menor for a resistência do indutor.

No segundo caso temos o seguinte circuito:



Este circuito é chamado RLC em paralelo porque o divisor de tensão é formado pela resistência R e o paralelo LC. A relação entre as tensões de entrada V_E e saída V_S é:

$$V_S = \frac{\dfrac{j\omega L \cdot \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}}{R + \dfrac{j\omega L \cdot \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}} \cdot V_E$$

A expressão é modificada para que o número complexo fique do formato a+jb:

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{\dfrac{j\omega L}{-\omega^2 LC + 1}}{R + \dfrac{j\omega L}{-\omega^2 LC + 1}} = \frac{\left(\dfrac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2 + j\left(\dfrac{\omega LR}{1-\omega^2 LC}\right)}{R^2 + \left(\dfrac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}$$

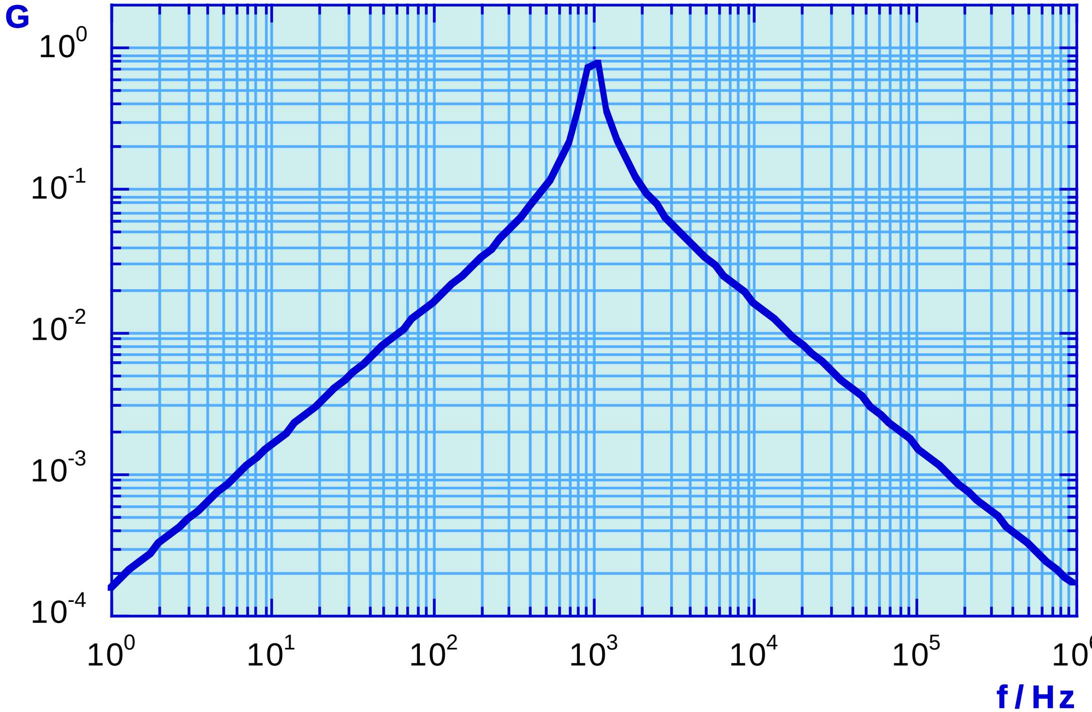
O módulo desta quantidade dá o ganho como função da frequência:

$$\left|\frac{V_S}{V_E}\right| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega L\right)^2}}$$

e a variação da fase com a frequência é dada por:

$$\phi = \arctan\left(\frac{R\left(1-\omega^2 LC\right)}{\omega L}\right)$$

Representemos graficamente a variação do ganho com a frequência para componentes com valores idênticos aos utilizados no circuito RLC em série:



O circuito comporta-se como filtro passa-banda. O ganho só é unitário para uma frequência:

$$\frac{\omega L}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2+\left(\omega L\right)^2}}=1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\omega L\right)^2 = R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2+\left(\omega L\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$

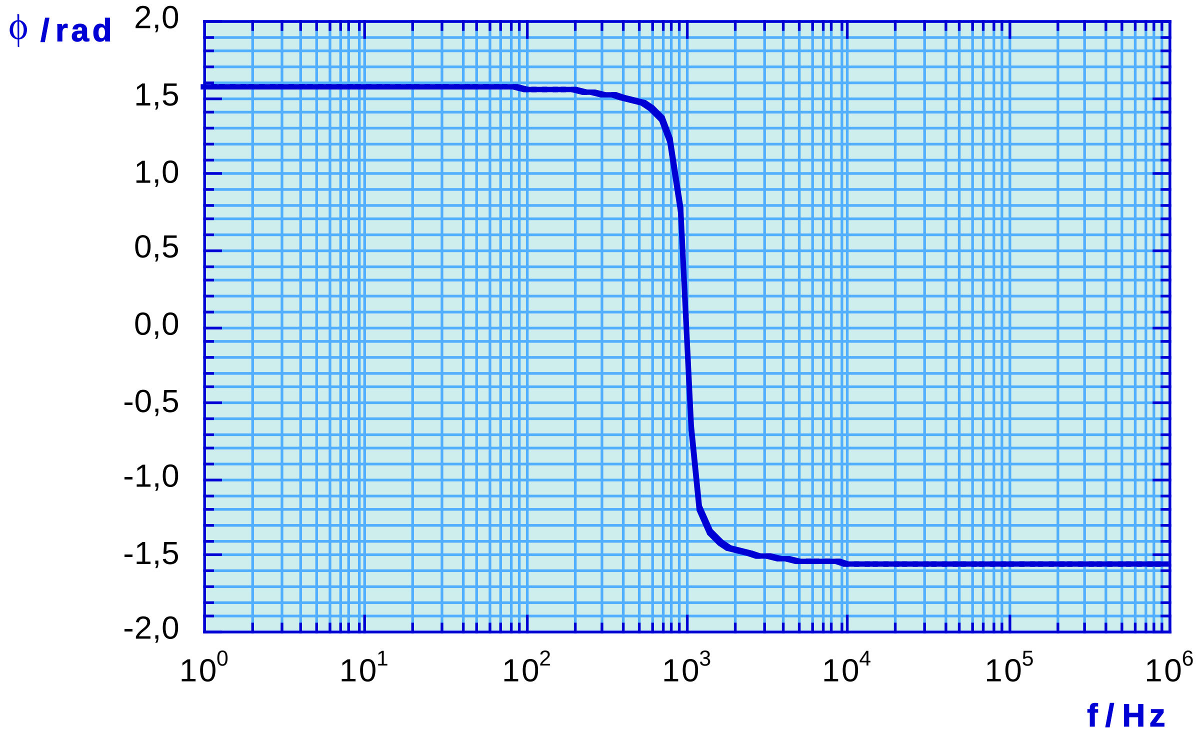
$$\Leftrightarrow \quad R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\omega^2 LC = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A largura da banda de passagem é determinada pelo valor da resistência R. Em particular, se R for nula o circuito tem ganho unitário para todas as frequências.

A diferença de fase varia da seguinte forma com a frequência:



A diferença de fase só se aproxima de zero na região de frequência central da banda de passagem. O sinal que passa está pouco desfasado em relação ao original. No entanto, fora da banda de passagem o desfasamento é $\pm\pi/2$.

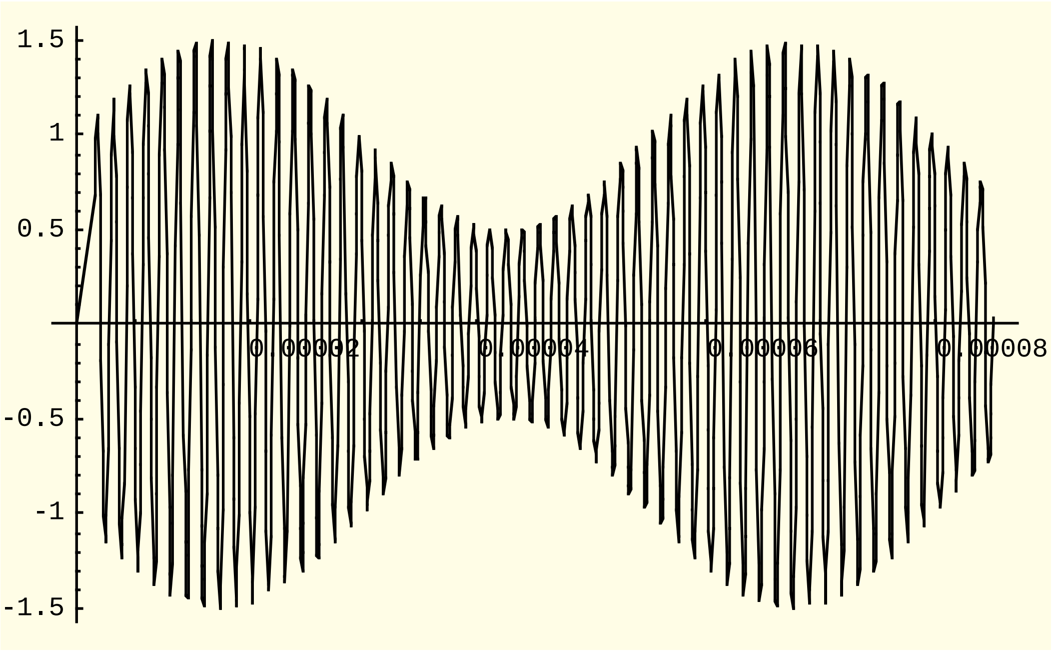
Note-se que tal como no caso anterior o desfasamento para sinais de frequência superior à central é simétrico dos de frequência inferior à central. Neste caso, para uma frequência inferior a 1 KHz a fase tende para $+\pi/2$ enquanto para uma frequência superior a 1 KHz a fase tende para $-\pi/2$.

Aplicações práticas dos filtros

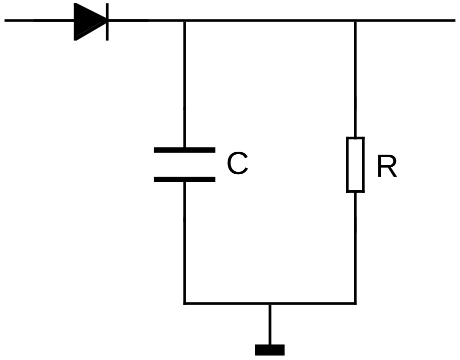
O objectivo principal de uma estação de rádio é emitir informação sonora sob a forma de ondas electromagnéticas. Assim, podería-se transformar as ondas sonoras produzidas por uma música em ondas electromagnéticas de igual frequência. Essas ondas electromagnéticas poderiam ser captadas por um receptor que as transformaria novamente em som.

O problema é que toda a gente quer ter a sua estação de rádio e o receptor iria ouvi-las todas ao mesmo tempo. Uma solução foi criar uma onda portadora com frequência entre 530 e 1600 KHz. Cada estação de rádio escolhe a sua frequência e faz modelação em amplitude dessa onda portadora. A modelação em amplitude neste caso é feita com ondas com frequências de audio (20 a 20000 Hz).

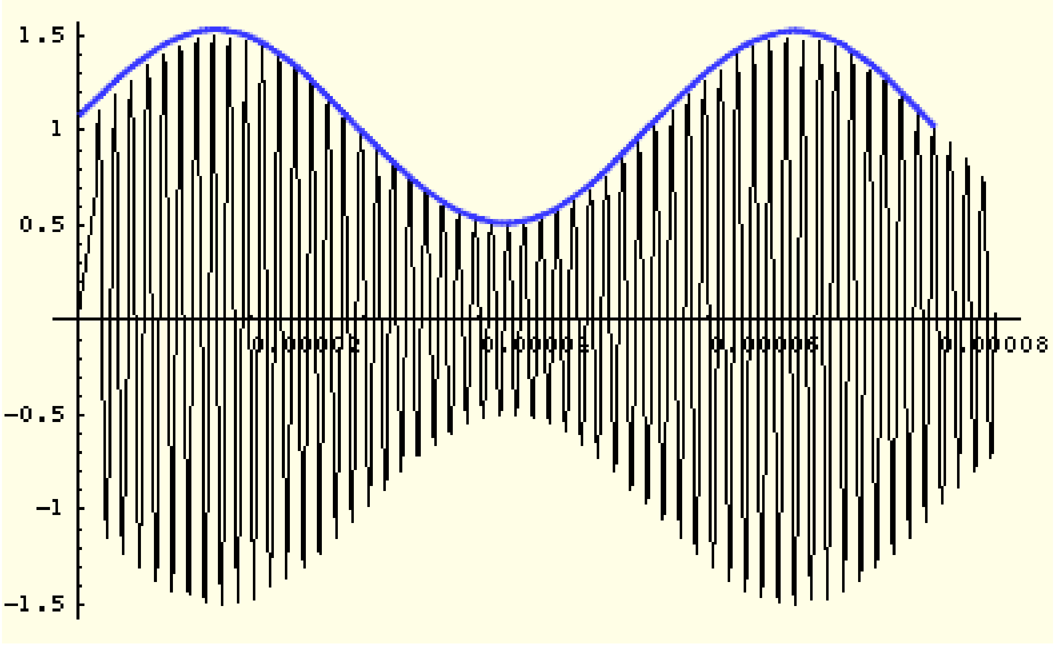
Por exemplo, podemos modelar uma onda portadora de 700 KHz com uma sinusoide de 20 KHz:



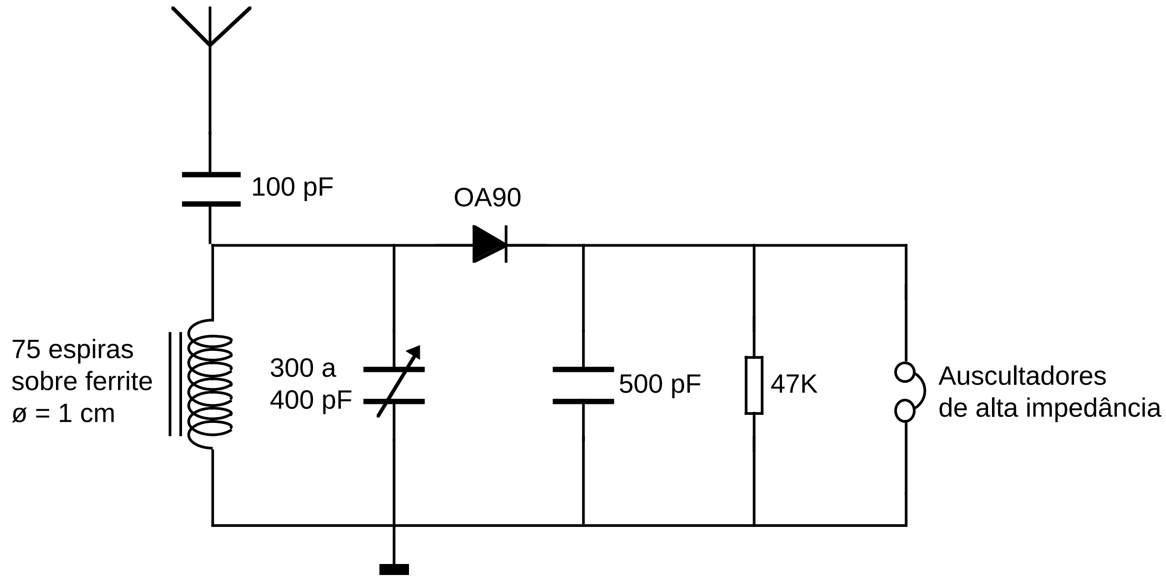
Um receptor com um filtro passa-banda que tenha ganho unitário só para a frequência de 700 KHz só recebe este sinal. Utiliza-se um circuito passa-banda para seleccionar a estação emissora pretendida. Esse filtro pode ser um circuito RLC em paralelo. Depois podemos acrescentar um desmodelador:



Este retira a onda modeladora da onda portadora. O circuito RC tem uma constante de tempo muito maior que o período de oscilação da onda portadora mas menor que o período de oscilação da onda modeladora. Por isso, o potencial de saída só consegue acompanhar o potencial da onda modeladora.



Com este conjunto podemos construir um rádio rudimentar de onda média. Este circuito não necessita de alimentação:



Os filtros são utilizados em muitos campos da ciência e do nosso dia-a-dia.

Alguns cantores estariam no desemprego se não se utilizasse um filtro para retirar algumas frequências indesejadas. Num submarino eliminam-se com filtros os sons naturais do oceano para salientar o som do motor de um barco. Em medicina podemos fazer processamento de imagens de diagnóstico com filtros. Enfim, as aplicações são imensas.