Capítulo 7

Hidrostática

7.1 Pressão

Quando falámos na estrutura molecular de um sólido vimos que cada molécula de uma estrutura cristalina está condicionada no seu movimento. Este facto resulta das forças de ligação exercidas pelos seus vizinhos. Podemos até utilizar a analogia da figura:

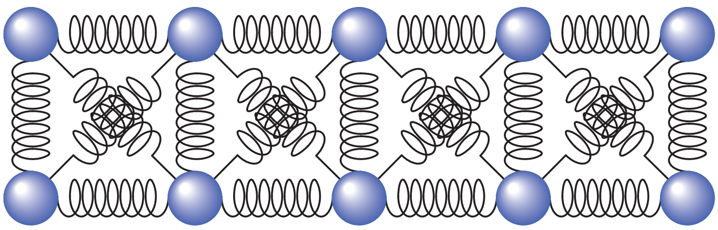

Figura 7.1: Interacções entre moléculas num sólido

em que as forças intermoleculares mais intensas estão representadas por molas. Consideremos um corpo em contacto com esta estrutura. O corpo exerce uma força sobre a rede cristalina. Se a área de contacto entre os dois é pequena (por exemplo é aplicada sobre uma única molécula), a deformação local da estrutura será grande:

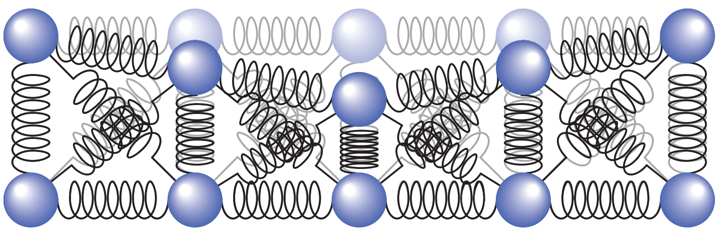

Figura 7.2: Deformação localizada de um sólido

Porquê? Porque a força aplicada está a competir com uma quantidade pequena de forças de ligação. Dito por outras palavras, o esforço é suportado por uma molécula só. Nestas circunstâncias não só é fácil deformar como até quebrar as ligações.

Se a área da superfície de contacto for grande a deformação sofrida pelo sólido será menor. A união faz a força:

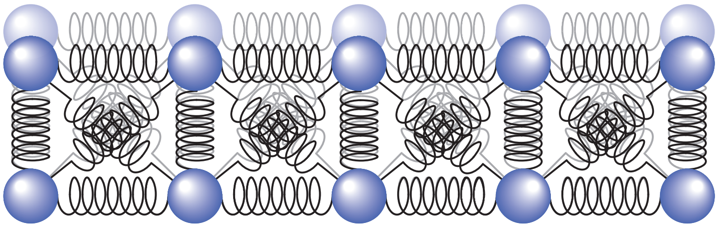

Figura 7.3: Deformação conjunta num sólido

Sendo assim, no que toca à integridade de um corpo, concluímos que não só é importante a força que se aplica sobre o mesmo, como é importante a forma como essa força é aplicada (área de aplicação da força).

Designa-se de pressão (P) a que um corpo está sujeito a força (F) que lhe é aplicada por unidade de área (A):

$$P = \frac{F}{A}$$

Num sólido a direção de aplicação da pressão é importante e por isso nesse caso este conceito é mais geral e designa-se de stress mecânico. Num líquido ou num gás, apesar da força ser uma grandeza vectorial, a pressão é definida a partir do módulo da força. Ou seja, a pressão não é uma grandeza vectorial. Porquê?

Nas figuras vemos que as moléculas estão actuadas por forças que em média são de igual intensidade em todas as direcções. Ou seja, a grandeza macroscópica pressão faz-se sentir com igual valor em todas as direcções num determinado ponto.

A unidade de pressão no Sistema Internacional é o $\mathrm{N\,m^{-2}}$. Em honra a Blaise Pascal $(1623 - 1662)$ esta unidade é designada de Pascal (Pa).

7.2 Pressão hidrostática

Toda a substância na qual as moléculas podem deslizar umas sobre as outras é designado de fluido. Os gases e os líquidos são portanto fluidos.

Deste ponto de vista a grande diferença entre os estados gasoso e líquido reside na sua compressibilidade:

- Um gás sujeito a uma certa pressão vê as suas moléculas aproximarem-se. A massa de moléculas por unidade de volume aumenta. Dito por outras palavras, a massa específica depende da pressão. O gás diz-se *compressível*.

- Um líquido mantém praticamente inalterada a distância entre as suas moléculas sob pressão variável. Ele é aproximadamente *incompressível* (a sua massa específica é independente da pressão).

A característica macroscópica principal de um fluido é a possibilidade de ser deformado. Em geral, até toma a forma do recipiente que o confina. Consideremos um fluido em equilíbrio estático num reservatório. Representamos na figura seguinte um elemento cilíndrico desse fluido em que o eixo de simetria do cilindro tem a mesma direcção que a aceleração gravítica:

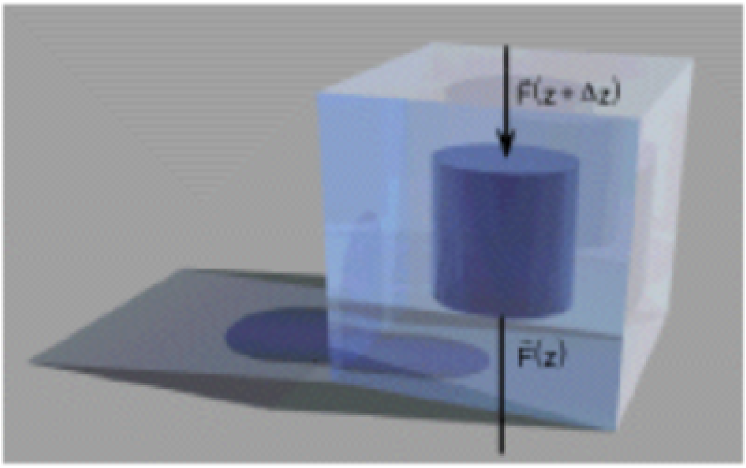

Figura 7.4: Elemento de fluido cilíndrico

O cilindro está em equilíbrio estático logo o somatório das forças que actuam sobre ele é nulo. Consideremos apenas as componentes verticais:

- na face superior o cilindro está sobre a acção de uma força de cima para baixo com intensidade $F\left(z+\triangle z\right)$.
- na face inferior o cilindro está sobre a acção de uma força de baixo para cima com intensidade $F\left(z\right)$.
- no centro do cilindro actua a força gravítica com intensidade $\triangle mg$.

Em que consideramos que o cilindro tem altura Δz, massa Δm e a posição vertical da base inferior é z.

Se adicionamos as forças obtemos:

$$\Delta mg + F(z+\Delta z) - F(z) = 0$$

Se a área da base do cilindro é A, então pela definição de pressão:

$$\rho A\Delta zg + P(z+\Delta z)A - P(z)A = 0$$

em que ρ é a massa específica do fluido.

Designemos a diferença de pressão entre as faces inferior e superior de ΔP, logo:

$$P(z+\Delta z) = P(z) + \Delta P$$

Substituindo na equação anterior obtemos:

$$\rho g\Delta z + P(z+\Delta z) - P(z) = 0$$

ou seja,

$$\Delta P = -\rho g\Delta z \tag{7.1}$$

Para um fluido incompressível, concluimos que a diferença de pressão entre dois pontos do fluido depende unicamente de três grandezas: a massa específica do fluido, a aceleração gravítica e o desnível vertical entre os dois pontos. Podemos ainda concluir que a pressão num ponto do fluido é tanto maior quanto maior for a sua profundidade (porque a pressão na face inferior do cilindro é maior que a da face superior).

Esta é a *equação fundamental da hidrostática*.

Vejamos um exemplo. Qual é a pressão num ponto $5\,\text{m}$ abaixo da superfície da água numa piscina de água do mar?

A pressão à superfície ($z = 0$) é de uma atmosfera $P_0 = 1\,\text{atm} = 1.013 \times 10^5\,\text{Pa}$. Pela equação fundamental da hidrostática a pressão no ponto de interesse é dada por:

$$P_0 - P = -\rho g(z - 0)$$

$$P = 1.013 \times 10^5\ \text{N m}^{-2} + 1.04 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3} \times 9.8\ \text{N kg}^{-1} \times 5\ \text{m}$$

$$P = 1.5 \times 10^5\ \text{Pa} = 1.5\ \text{atm}$$

Se um fluido é compressível então a massa específica varia com a pressão. Temos que tornar a altura do cilindro infinitesimal e a equação fundamental da hidrostática passa a ter a forma:

$$dP = -\rho(P) g dz \tag{7.2}$$

Integrando esta equação diferencial obtemos:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{P_0} z\right) \tag{7.3}$$

em que ρ_0 é a massa específica do fluido para $z = 0$ e P_0 é a pressão à mesma altura.

Como os gases são compressíveis podemos utilizar esta equação para descrever a variação da pressão atmosférica com a altitude. Nesta situação consideramos a posição $z = 0$ o nível médio das águas do mar: $P_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa, $\rho_0 = 1.29\ \text{kg m}^{-3}$ e

$$P = \left(1.013 \times 10^5\ \text{Pa}\right) \exp\left(-\frac{1.29\ \text{kg m}^{-3} \times 9.8\ \text{N kg}^{-1}}{1.013 \times 10^5\ \text{Pa}} z\right)$$

Se representarmos graficamente obtemos:

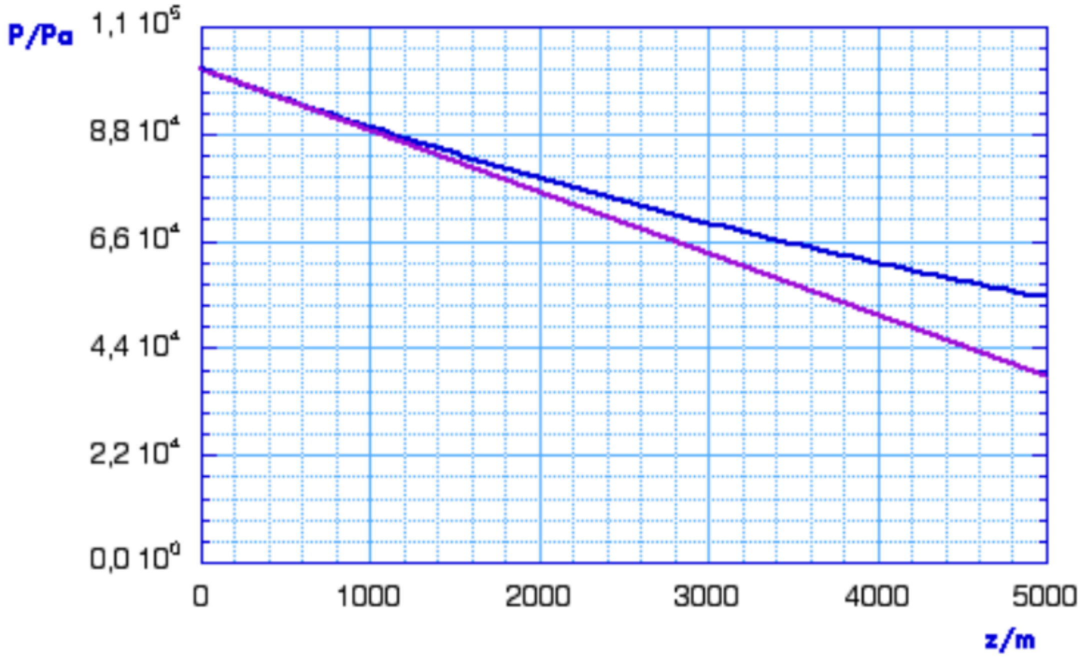

Figura 7.5: Variação da pressão atmosférica com a altitude (até 5000 m) assumindo que o ar é incompressível (violeta) ou que é compressível (azul)

A linha a azul é a que obtemos assumindo que o ar é um gás compressível. A título de comparação está representada a violeta a variação da pressão com a altitude assumindo que o ar é um gás incompressível.

Para baixas altitudes a diferença é pouco significativa.

Para grandes altitudes vemos que por exemplo a $10000\,\mathrm{m}$ (altitude típica de cruzeiro de um avião) o modelo linear prevê uma pressão nula, quando na realidade a pressão é cerca de 29% da pressão P_0:

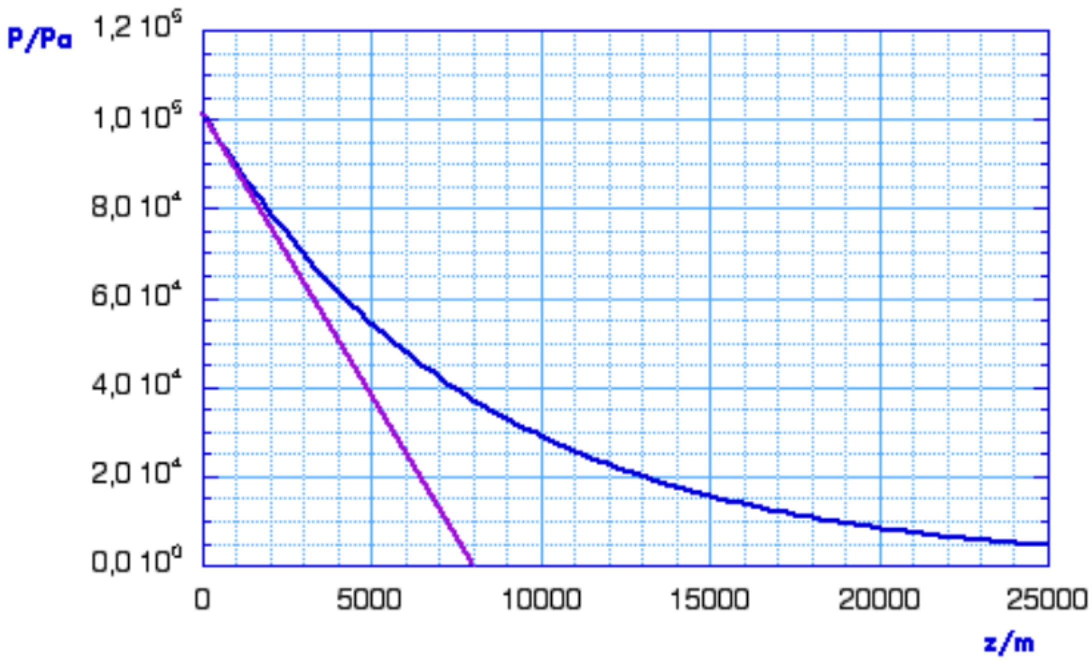

Figura 7.6: Variação da pressão atmosférica com a altitude (até $25000\,\mathrm{m}$) assumindo que o ar é incompressível (violeta) ou que é compressível (azul)

7.3 A experiência de Torricelli

Evangelista Torricelli realizou em 1643 a seguinte experiência:

Encheu completamente um tubo de ensaio com mercúrio. Inverteu o tubo sem derramar e mergulhou-o numa tina com mercúrio.

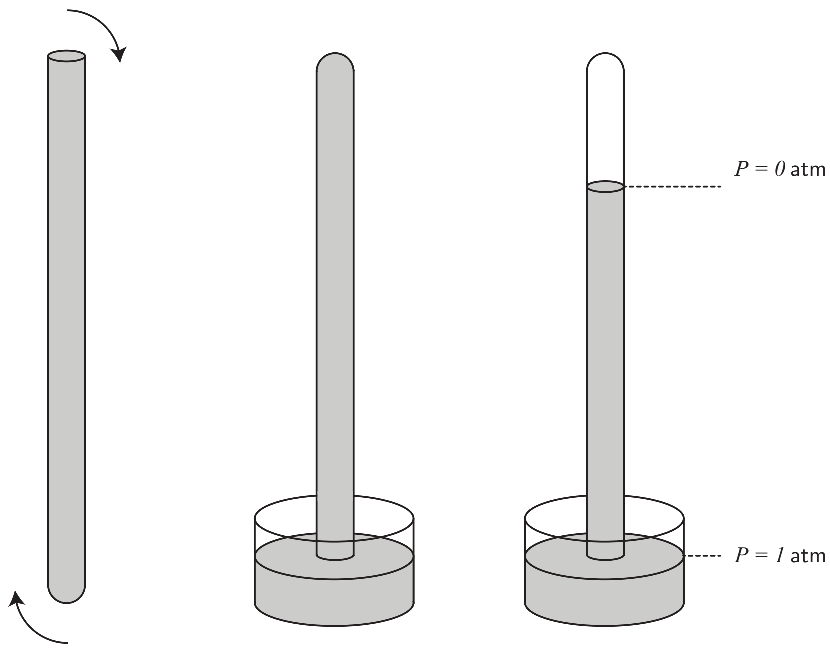

Figura 7.7: Experiência de Torricelli

Observou que o mercúrio não escoava todo para a tina e que no topo do interior do tubo de ensaio apareceu um espaço.

Se imaginarmos que o mercúrio desliza como um êmbolo na parede interior do tubo, então o espaço que aparece está completamente desprovido de matéria. A pressão é nula.

Na realidade, apesar de pequena, a pressão não é nula. Isto porque algum mercúrio passou ao estado de vapor. No entanto, se compararmos esta pressão com a pressão atmosférica ela é praticamente nula.

Podemos concluir que a diferença de pressão entre a superfície livre do mercúrio e a superfície interna (dentro do tubo) é de uma atmosfera.

Torricelli observou que a altura da coluna de mercúrio tinha um valor cerca de 760 mm.

Recorrendo à equação fundamental da hidrostática sabemos que:

$$\triangle P = \rho_{Hg} g h_{Hg}$$

$$P - 0 = 13.6 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 9.8 \text{ N kg}^{-1} \times 0.76 \text{ m} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Torricelli criou assim o primeiro barómetro (aparelho para medir a pressão atmosférica).

O princípio de funcionamento do barómetro de Torricelli só foi descoberto mais tarde por Pascal. Foi com este aparelho que Pascal verificou a variação da pressão atmosférica com a altitude. As suas medições em Paris e no topo de uma montanha sobre Clermont-Ferrand fizeram-no concluir que a pressão diminuia com a altitude.

Foram estes estudos que o conduziram ao *Princípio de Pascal*. Este diz que num fluido incompressível as variações de pressão são transmitidas integralmente a todas as porções do fluido e às paredes do seu continente. Ou seja, pontos de um fluido à mesma altitude estão à mesma pressão.

Este Princípio também é conhecido como o Princípio dos Vasos Comunicantes.

7.4 Manómetros na Saúde

A experiência de Torricelli constituiu um exemplo de como é possível relacionar duas grandezas de natureza diferente. Nesta experiência a pressão atmosférica pode ser medida indirectamente através da altura de uma coluna de mercúrio. Uma grandeza que não é fácil medir directamente (pressão) pode simplesmente ser avaliada com uma régua!

Figura 7.8: Esquema do barómetro de Torricelli como um transdutor

De forma geral um aparelho que permite relacionar uma grandeza física com outra tem a designação de um *transdutor*.

O barómetro de Torricelli serviu de inspiração para a criação de aparelhos que permitem a medição de pressão em geral. Estes aparelhos são designados de *manómetros*.

O esfigmomanómetro (esfigmo - pulsar ou batimento) foi criado por Samuel Siegfried Karl Ritter von Basch em 1881 (2 séculos após a experiência de Torricelli) para medir a pressão arterial de forma não invasiva.

A pressão sanguínea durante a contracção do ventrículo esquerdo cardíaco (sístole) é em média de 120 mmHg e durante a descontracção (diástole) é de 80 mmHg.

Consideremos que a pressão sanguínea oscila de forma sinusoidal:

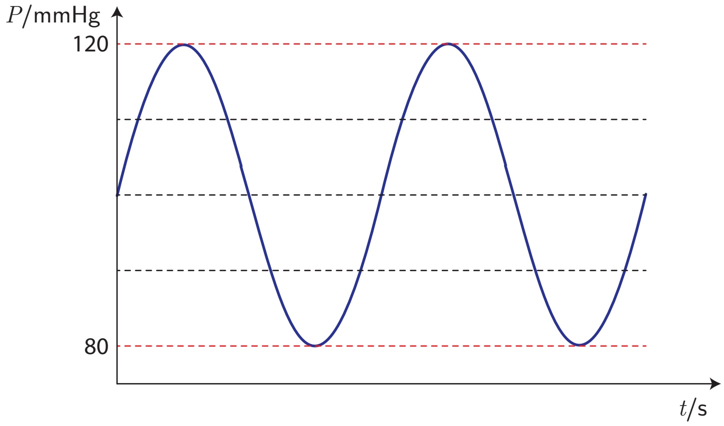

Figura 7.9: Aproximação de variação sinusoidal da pressão sanguínea

Suponhamos que exercemos uma compressão superior a 120 mmHg sobre uma artéria. A artéria colapsa e a circulação sanguínea é interrompida. Se em seguida diminuimos gradualmente a compressão, eventualmente a pressão atingirá os 120 mmHg.

Para valores inferiores a 120 mmHg, durante a sístole a artéria começa a abrir e durante a diástole irá fechar. Ouve-se por isso um som pulsante do batimento cardíaco. Este som irá manter-se enquanto a presssão de compressão estiver entre os 120 mmHg e os 80 mmHg. Assim que a pressão se compressão for inferior a 80 mmHg, a artéria ficará aberta tanto durante a sístole como durante a diástole. Deixa-se de ouvir o som pulsante.

Em conclusão, a medição da pressão sistólica será a que é medida assim que se começa a ouvir o som pulsante e a pressão diastólica será a que é medida assim que se deixa de ouvir o som pulsante.

O aparelho é constituído por uma manga insuflável com uma bomba de ar (para criar a compressão), um estetoscópio que é colocado entre a braçadeira e o braço (para ouvir o som pulsante) e um manómetro para realizar as leituras de pressão:

Figura 7.10: Esfigmomanómetro clássico

7.5 As unidades de pressão

A partir da experiência de Torricelli convencionou-se que a pressão de uma atmosfera (1 atm) era igual à pressão que produzia uma leitura de 760 mm de mercúrio no barómetro.

Por conveniência às vezes utilizam-se as seguintes unidades:

$$1\ \mathsf{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathsf{N\,m^{-2}} \times \frac{1\ \mathsf{kgf}}{9.8\ \mathsf{N}} \times \frac{1\ \mathsf{m^2}}{10^4\ \mathsf{cm^2}} = 1.0\ \mathsf{kgf\,cm^{-2}}$$

$$1\ \mathsf{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathsf{N\,m^{-2}} \times \frac{1\ \mathsf{lbf}}{4.45\ \mathsf{N}} \times \frac{1\ \mathsf{m^2}}{1550\ \mathsf{in^2}} = 14.7\ \mathsf{lbf\,in^{-2}} = 14.7\ \mathsf{psi}$$

$$1\ \mathsf{atm} = 760\ \mathsf{mmHg} = 760\ \mathsf{torr}$$

$$1\ \mathsf{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathsf{Pa} \times \frac{1\ \mathsf{bar}}{10^5\ \mathsf{Pa}} = 1.013\ \mathsf{bar}$$

Suponhamos que Torricelli tentava realizar a sua experiência com água em vez de mercúrio. Pela equação fundamental da hidrostática:

$$\triangle P = \rho_{H_2O} g h_{H_2O}$$

$$1.013 \times 10^5\ \mathsf{Pa} = 1 \times 10^3\ \mathsf{kg\,m^{-3}} \times 9.8\ \mathsf{N\,kg^{-1}} \times h_{H_20}$$

o que implica que $h_{H_20} = 10.3$ m. Ou seja, seria necessária uma coluna de água de mais de 10 m !

Uma vez que o corpo humano contém cerca de 70% de água é relevante estimar as diferenças de pressão resultantes de desníveis à escala humana (e.g. 1 m):

$$\triangle P = \rho_{H_2O} g h_{H_2O}$$

$$1 \times 10^3\ \mathsf{kg\,m^{-3}} \times 9.8\ \mathsf{N\,kg^{-1}} \times 1\ \mathsf{m} = 9.8 \times 10^3\ \mathsf{Pa}$$

O que equivale a:

$$9.8 \times 10^3\ \mathsf{Pa} \times \frac{760\ \mathsf{mmHg}}{1.013 \times 10^5\ \mathsf{Pa}} = 73.5\ \mathsf{mmHg}$$

Por cada metro de desnível a água em equilíbrio estático produz diferenças de pressão cerca de 73.5 mmHg.

7.6 O Princípio de Arquimedes

Um corpo quando está imerso num fluido sofre uma impulsão de baixo para cima. Arquimedes quantificou esta impulsão. Ele descobriu que *o seu valor é independente do material que está imerso* e é igual ao peso do volume de fluido deslocado.

Este é o Princípio de Arquimedes. Para percebermos melhor este conceito consideremos duas situações distintas:

1 - Um bloco cúbico de madeira dentro de água líquida.

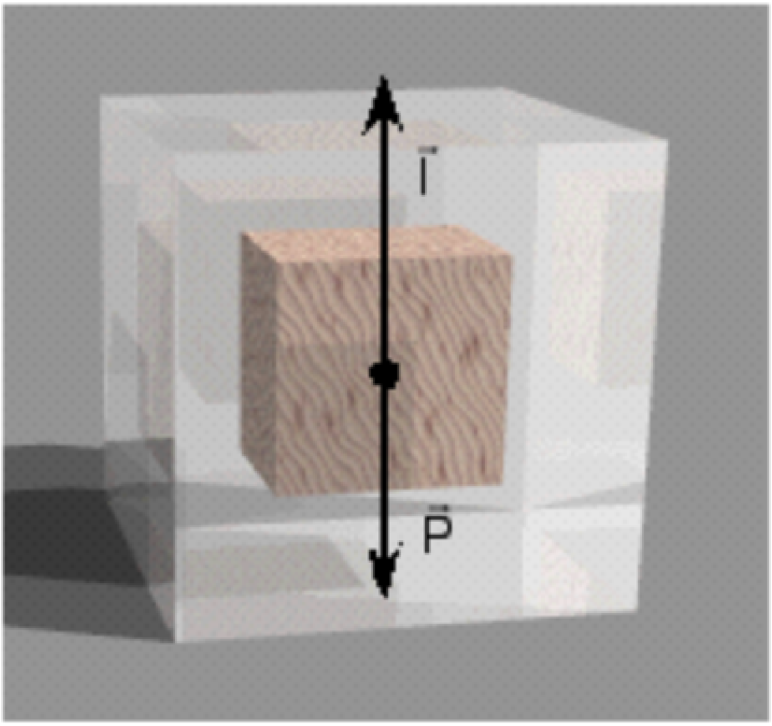

Figura 7.11: Cubo de madeira submerso em água

O bloco é actuado por duas forças: a força gravítica $\left(\vec{P}\right)$ e o impulso $\left(\vec{I}\right)$.

Vamos quantificar estas duas forças. Se a massa específica (ρ) da madeira é de 700 kg m^{-3} e o volume do bloco (V) é 1 dm^3, a força gravítica que nele actua tem a seguinte intensidade:

$$P = mg = \rho V g = 700 \text{ kg m}^{-3} \times 10^{-3} \text{ m}^3 \times 9.8 \text{ N kg}^{-1} = 6.9 \text{ N}$$

O impulso é o peso do volume de líquido deslocado. O corpo desloca um volume igual ao seu quando está submerso. Isto porque o líquido, (tal como um gás) toma a forma do seu continente. Sendo assim basta imaginarmos uma réplica do cubo mas constituida de fluido:

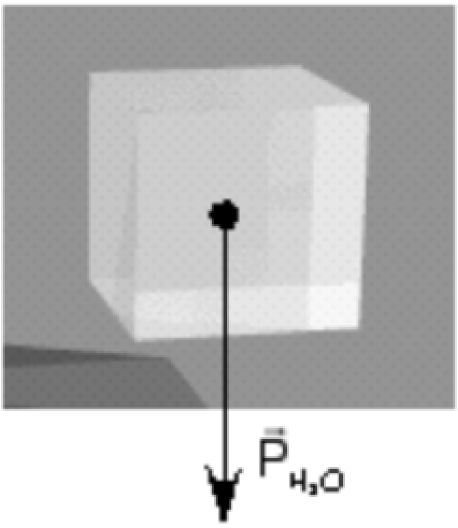

Figura 7.12: Objecto imaginário de fluido

O impulso que actua sobre o bloco de madeira tem uma intensidade igual à da força gravítica que actua sobre este fluido:

$$\left|\vec{I}\right| = \left|\vec{P}_{H_2O}\right|$$

Ou seja,

$$I = \rho_{H_2O} V g = 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 10^{-3} \text{ m}^3 \times 9.8 \text{ N kg}^{-1} = 9.8 \text{ N}$$

em que ρ_{H_2O} é a massa volúmica da água.

Concluímos que neste caso o corpo irá flutuar porque o impulso é superior à força gravítica.

2 - O bloco de madeira é substituido por outro de ouro de igual volume.

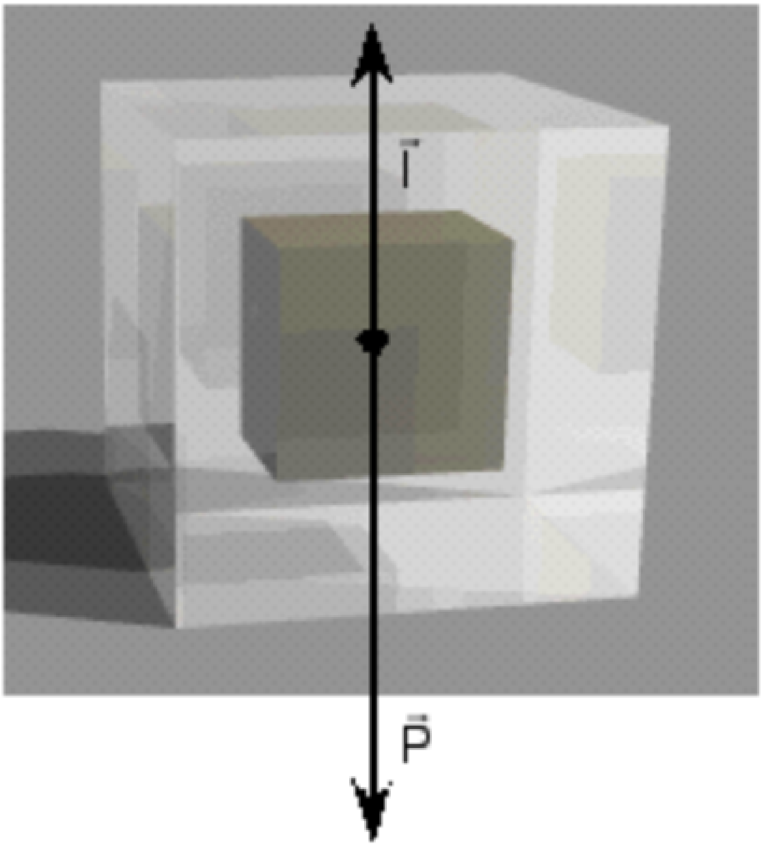

Figura 7.13: Cubo de ouro submerso em água

Se a massa específica (ρ_{Au}) do ouro é de 19300 kg m^{-3} e o volume do bloco (V) é 1 dm^3, a força gravítica que nele actua tem a seguinte intensidade:

$$P = mg = \rho_{Au} V g = 19300 \text{ kg m}^{-3} \times 10^{-3} \text{ dm}^3 \times 9.8 \text{ N kg}^{-1} = 189.1 \text{ N}$$

O volume deslocado pelo bloco não se alterou logo o impulso é o mesmo ($I = 9.8 \text{ N}$). O corpo não flutua porque a força gravítica é superior ao impulso.

Note-se que as grandezas que determinaram que o corpo flutuava ou não foram as massas específicas das substâncias submersas e do fluido. Se a massa específica do corpo é maior que a do fluido, o corpo submerge. Se a massa específica do corpo é menor que a do fluido, o corpo flutua. Quando o corpo é constituido por várias substâncias de diferentes massas específicas a grandeza determinante é a massa específica média. Um transatlântico é feito de ferro e flutua porque grande parte do volume deslocado é ar.