

# Capítulo 8

## Hidrodinâmica

Na hidrodinâmica, estuda-se o movimento macroscópico dos fluidos e sua interação com os seus continentes.

### 8.1 O Fluido ideal

Um fluido ideal caracteriza-se por duas propriedades:

1. Quando é sujeito a uma alteração de pressão a massa específica (massa por unidade de volume) não se altera. Ou seja, a sua densidade não se altera. Diz-se que o fluido é *incompressível*. Por exemplo, se considerarmos que um elemento de volume de  $1\text{ cm}^3$  de água no estado líquido é incompressível, estamos a assumir que ao sofrer um aumento de pressão, a massa de água será sempre a mesma (e.g.  $1\text{ g}$  se a massa específica da água é  $1\text{ g cm}^{-3}$ ).
2. Os elementos de volume que constituem o fluido não interagem entre si. Ou seja deslizam uns sobre os outros sem qualquer força de atrito.

Para quantificar o movimento de um fluido bastar-nos-ia saber a velocidade de cada elemento de volume que o constitui.

Quando a velocidade de escoamento é constante diz-se que temos um escoamento *permanente*. Se a velocidade varia com o tempo o escoamento é *variado*.

Consideremos a seguinte situação, um tubo cilíndrico no qual um fluido desloca-se a velocidade constante:

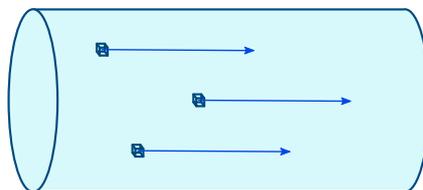


Figura 8.1: Movimento de elementos de volume num fluxo laminar

Como podemos medir a velocidade de escoamento? Vimos na hidrostática que quando um corpo tem a mesma massa específica do fluido em que está imerso ele fica à deriva. Ou seja, a resultante das forças (impulso e força gravítica) é nula.

Esse corpo seguirá o movimento do fluido e por isso pode ser utilizado para caracterizar o fluxo. Se o seu movimento é linear dizemos que temos um *fluxo laminar*.

Noutras circunstâncias (veremos mais tarde) o seu movimento pode ser caótico e dizemos que temos um *fluxo turbulento*.

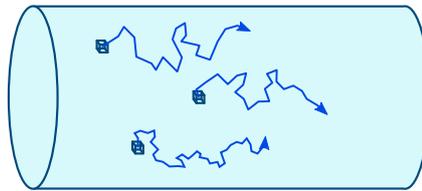


Figura 8.2: Movimento de elementos de volume num fluxo turbulento

Se tivermos em conta a segunda propriedade de um fluido ideal, podemos inferir que num fluido ideal o fluxo é sempre laminar.

O volume de fluido ( $V$ ) que atravessa uma determinada secção recta (de área  $A$ ) de um tubo por unidade de tempo ( $t$ ) chama-se *vazão volúmica* ( $Q$ ):

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Tendo em conta que neste caso o elemento de volume tem uma forma cilíndrica:

$$Q = \frac{A\Delta x}{\Delta t}$$

No intervalo de tempo  $\Delta t$  o dito volume desloca-se uma distância  $\Delta x$ . Logo a sua velocidade ( $v$ ) é:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Logo:

$$Q = Av \tag{8.1}$$

Se em vez do volume quisermos quantificar a massa de fluido transportado podemos definir *vazão mássica* ( $Q_m$ ) como a massa de fluido que atravessa uma determinada secção recta (de área  $A$ ) do tubo por unidade de tempo:

$$Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho\Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho A\Delta x}{\Delta t}$$

em que  $\rho$  é a massa volúmica do fluido.

## 8.2 Princípio da continuidade

Consideremos um tubo cilíndrico percorrido por um fluido em escoamento permanente ao longo do eixo de simetria do tubo (geratriz):

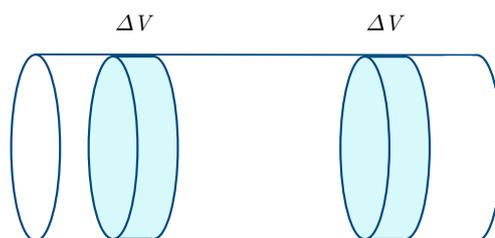


Figura 8.3: Tubo percorrido por fluido em escoamento permanente

O volume de fluido ideal ( $\Delta V$ ) que entra no tubo à esquerda num determinado intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) tem que ser igual ao volume que sai à direita no mesmo intervalo de tempo (desde que o tubo não tenha outros furos na parede lateral por onde entre ou saia fluido). Este conceito fundamental é designado de *Princípio da*

*Continuidade* é enunciado de uma forma mais geral (não apenas para o caso do tubo cilíndrico) do seguinte modo: num determinado volume a vazão volúmica de um fluido ideal é nula desde que o volume não contenha fontes ou vasadouros.

O fluido que entra contribui com um sinal positivo para o balanço e o que sai com um sinal negativo.

Consideremos agora um tubo cilíndrico mas no qual há uma variação da área de secção recta de acordo com a figura 8.4:

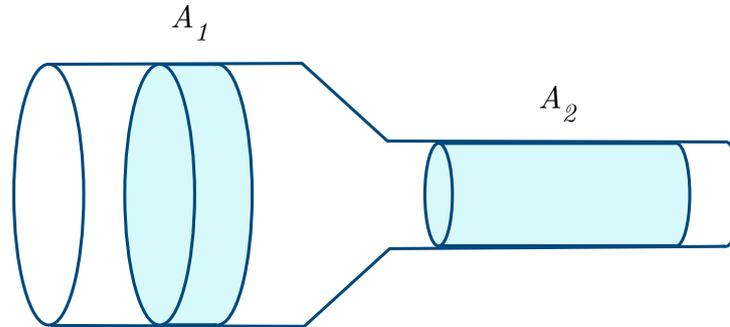


Figura 8.4: Tubo cilíndrico de área de secção recta variável

Aplicando o Princípio da Continuidade sabemos que a vazão volúmica tem o mesmo valor em qualquer secção recta do tubo. Em particular se  $Q_1$  for a vazão volúmica na secção recta com área  $A_1$  e  $Q_2$  for a vazão volúmica na secção recta com área  $A_2$ , sabemos que:

$$Q_1 = Q_2$$

Logo de acordo com a equação 8.1:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

em que  $v_1$  é a velocidade de escoamento em  $A_1$  e  $v_2$  é a velocidade de escoamento em  $A_2$ .

Se a área de um tubo diminui ( $A_1 > A_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} > 1$ ) então a velocidade do fluido em 2 tem que ser maior do que em 1 para que se transporte o mesmo volume num dado intervalo de tempo:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

É o que acontece por exemplo quando regamos o jardim com uma mangueira. Se pretendemos aumentar a velocidade de saída da água tapamos parcialmente a saída da mangueira, a área reduz-se e a velocidade aumenta.

### 8.3 Conservação de energia

Como vimos anteriormente num fluido ideal não há atritos (forças dissipativas, não-conservativas) logo há conservação de energia mecânica ao longo do seu movimento.

Para uma dada secção recta de um tubo cilíndrico, a energia mecânica por unidade de volume é dada por:

$$\frac{W + E_C + E_P}{V} = \frac{F \Delta x}{A \Delta x} + \frac{\frac{1}{2} m v^2}{V} + \frac{m g h}{V} = P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h$$

em que  $W$  é o trabalho realizado pelas forças aplicadas no volume de fluido  $V$ ,  $E_C$  é a energia cinética do mesmo e  $E_P$  é a sua energia potencial gravítica.  $F$  é a resultante das forças aplicadas sobre o volume,  $\Delta x$  é o seu deslocamento ao longo da direcção horizontal,  $v$  é a sua velocidade,  $m$  é a sua massa,  $g$  é a aceleração gravítica e  $h$  é a distância segundo a direcção vertical em relação a uma altura de referência (e.g. nível médio das águas do mar).

Da primeira parcela da soma obtemos a força aplicada por unidade de área, ou seja a pressão  $P$  a que está sujeito o volume  $V$ .

A massa por unidade de volume é a massa específica  $\rho$ .

Sendo assim, podemos concluir que a partir do Princípio de Conservação da Energia Mecânica a quantidade:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh$$

mantém-se constante para um determinado volume de fluido.

Em dois pontos sucessivos 1 e 2, do movimento desse volume de fluido sabemos que:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

Esta é conhecida com a *equação de Bernouilli*.

Desta igualdade podemos concluir que quando há um estreitamento de um tubo (fig. 8.4), a velocidade aumenta (pelo Princípio da Continuidade) e por isso a pressão diminui:

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho (v_1^2 - v_2^2)$$

Vemos na equação que: como a velocidade em 2 é maior que em 1 ( $v_2 > v_1$ , porque  $v_2 = (A_1/A_2) v_1$ ) então a pressão no ponto 2 é menor que no ponto 1 ( $P_2 < P_1$ ).

Este fenómeno é designado de *efeito de Venturi*.

Por exemplo quando estamos à beira de uma estrada e passa um autocarro depressa sentimos uma força que parece empurrar-nos para o autocarro. O que acontece é que o ar deslocado pelo autocarro encontra um estreitamento (espaço entre a pessoa e o autocarro). A pressão neste espaço diminui. Como a pressão nas nossas costas mantém-se praticamente inalterada, da diferença de pressão resulta uma força que nos impele para o autocarro.

Quem pratica vela nota também que quando dois barcos navegam lado a lado há uma força que fá-los colidir. A água do mar é forçada a passar num estreitamento (espaço entre os barcos) e cria-se aí uma menor pressão.

Reparemos na secção da asa de um avião. A superfície superior (1) é arredondada enquanto a inferior (2) é recta:

Na face inferior o ar não encontra um estreitamento quando se desloca paralelamente a esta face. Na face superior, o ar encontra um estreitamento e cria-se uma menor pressão:

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (h_2 - h_1)$$

Desta diferença de pressão obtemos uma força de sustentação:

$$F_S = (P_2 - P_1) A$$

em que  $A$  é a área média das faces da asa.

## 8.4 Viscosidade

Até agora considerámos que o fluido em estudo era ideal. No entanto, sabemos que um fluido real é constituído por moléculas que interagem entre si e com as do reservatório em que estão contidas.

Através destas interacções há dissipação de energia. Consideremos por exemplo a situação em que temos um fluido com escoamento permanente. Podemos isolar duas lâminas consecutivas do fluido paralelas à direcção do movimento. Essas lâminas de fluido deslizam uma sobre a outra.

Se o fluido é ideal esse deslize faz-se sem atrito porque assumimos que não há forças de interacção entre as suas moléculas. Porém se houver interacção entre as moléculas há atrito no contacto entre as duas lâminas.

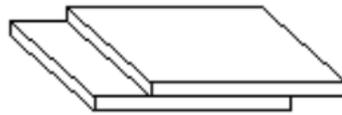


Figura 8.5: Lâminas de fluido em contacto

Pela mesma razão há também atrito entre a lâmina de fluido que desliza sobre a parede do reservatório. Comparemos então a distribuição das velocidades de elementos de fluido nos casos ideal e real:

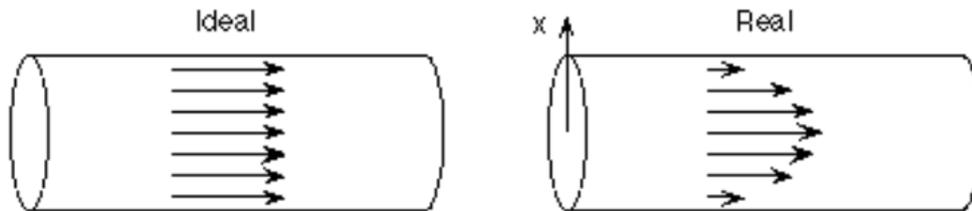


Figura 8.6: Distribuição de velocidades para fluidos ideal e real

No caso ideal vemos que não há variação da velocidade ao longo da direcção  $x$ . O mesmo não acontece no caso real. À medida que nos deslocamos ao longo de uma direcção  $y$  perpendicular a  $x$ , do centro do tubo para a parede, a velocidade do fluido diminui. Podemos quantificar a força de interacção ( $F$ ) a partir da variação da velocidade ( $\Delta v$ ) com  $y$ :

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

É intuitivo que a força será tanto maior quanto maior for a área de contacto entre o fluido e a parede do reservatório ( $A$ ) e quanto maior for a variação da velocidade ao longo de  $y$ . A grandeza  $\eta$  tem o nome de viscosidade e a sua unidade do SI é o Pa s.

Vejam agora a seguinte experiência:

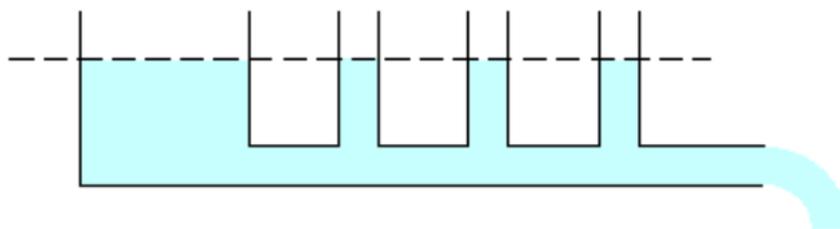


Figura 8.7: Pressão ao longo de tubo com escoamento permanente de fluido ideal

A pressão na base de todas as colunas de fluido é a mesma porque têm todas a mesma altura. Isto só acontece porque não há interacção entre as moléculas do fluido e o reservatório. Ou seja, o fluido é ideal.

Com um fluido real as forças de atrito fazem com que a pressão vá diminuindo com a distância percorrida no tubo:

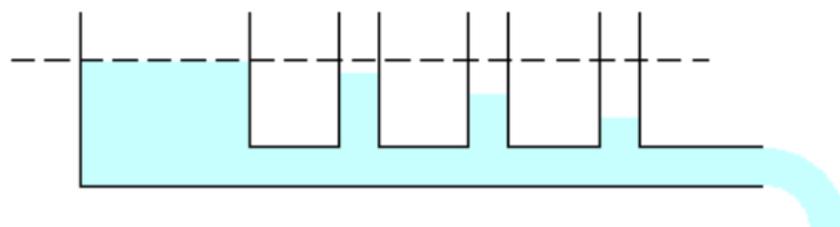


Figura 8.8: Pressão ao longo de tubo com escoamento permanente de fluido real

A variação da pressão ( $\Delta P$ ) por unidade de comprimento ( $\Delta l$ ) é tanto maior quanto maior for a viscosidade do fluido ( $\eta$ ) e quanto maior for a vazão volúmica ( $Q$ ). É também tanto maior quanto menor for o raio do tubo ( $R$ ).

Estes factos estão concentrados na seguinte relação entre as grandezas mencionadas:

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = \frac{8\eta Q}{\pi R^4}$$

Esta é a *lei de Poiseuille*. Esta lei tem grandes semelhanças com a lei de Ohm. Esta afirmação parece estranha mas vejamos de onde vem.

Alterarmos a sequência das variáveis apresentadas na equação da seguinte forma:

$$\Delta P = \frac{8\eta \Delta l}{\pi R^4} Q$$

Vamos a analogias. A diferença de pressão entre dois pontos pode ser associada a uma diferença de potencial. A primeira pode resultar de um excesso de fluido de um lado em relação a outro. A segunda de um excesso de carga eléctrica.

A intensidade da corrente eléctrica é uma medida de transporte de carga eléctrica, assim como a vazão volúmica é uma medida do volume de fluido transferido.

Relembrando a lei de Ohm, a diferença de potencial ( $\Delta V$ ) é directamente proporcional à intensidade da corrente ( $i$ ):

$$\Delta V = Ri$$

A lei de Poiseuille pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\Delta P = R_h Q$$

em que  $R_h$  é designada de *resistência hidrodinâmica* do tubo. Vemos assim a semelhança entre as duas leis.

Como sabemos, a velocidade dos elementos de fluido é variável ao longo de  $y$ . Daí que não podemos quantificar a velocidade de escoamento com um só valor. Podemos no entanto ter em conta a velocidade média do fluido. Este valor pode ser determinado a partir da vazão volúmica:

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} \quad (8.2)$$

## 8.5 Velocidade crítica

A viscosidade de um fluido tem ainda outro efeito sobre o fluxo. A baixas velocidades todos os elementos de volume têm um movimento rectilíneo (fluxo laminar). A partir de uma certa velocidade, este movimento sofre uma transformação repentina e surpreendente: o movimento de cada elemento de volume torna-se caótico (imprevisível - fluxo turbulento).

A velocidade a que tal acontece designa-se de *velocidade crítica*.

Vejamos alguns exemplos práticos:



Figura 8.9: Escoamento de água ao colidir com superfície horizontal

Quando abrimos uma torneira de água observamos que quando a água colide com a pia formam-se círculos. Dentro dos círculos vemos que a textura da água é radial a partir da área de impacto. Daí depreendemos que o movimento da água faz-se em linha recta e o fluxo é laminar.

Ao longo do seu movimento rectilíneo a velocidade da água aumenta até que atinge a velocidade crítica. Quando isto acontece o movimento da água torna-se caótico e a textura radial é substituída por uma elevação irregular. Como há simetria em torno do ponto de impacto, nós vemos circunferências.

Se olharmos para o fumo que sai de um cigarro observamos que o fumo sobe inicialmente em linha recta (o fluxo é laminar). Porém quando atinge uma certa altura passa a ter um movimento irregular (fluxo turbulento) porque superou a velocidade crítica.

Quais são os factores que influenciam o valor da velocidade crítica?

Quanto maior é a viscosidade  $\eta$  de um fluido maior é a velocidade crítica  $v_c$ . Líquidos mais viscosos só passam para o regime turbulento a grandes velocidades. É difícil ver a glicerina em fluxo turbulento.

Quanto menor é o diâmetro  $D$  do tubo em que o fluido movimenta-se, maior é a velocidade crítica. Num tubo fino é mais difícil ver um líquido em fluxo turbulento que num tubo largo.

Quanto menor é a massa específica do fluido  $\rho$  maior é a sua velocidade crítica. Por exemplo, a velocidade crítica do ar é muito superior à da água.

Dados estes factos experimentais, procurou-se relacionar estas quatro grandezas e chegou-se à seguinte equação:

$$v_c = \frac{\eta R_e}{D\rho}$$

A constante  $R_e$  é denominada de constante de Reynolds e embora o seu valor varie ligeiramente para os diferentes fluidos, toma-se em geral o valor de 2000. Inversamente podemos imaginar que pretendemos averiguar se um fluido está em regime turbulento. Sabemos que a velocidade média de escoamento  $\bar{v}$  é dada pela equação 8.2, a partir da viscosidade do fluido  $\eta$ , a sua massa específica  $\rho$  e o diâmetro do tubo  $D$ . Se a razão:

$$\frac{\bar{v}D\rho}{\eta}$$

é maior que 2000 então o fluxo é turbulento. Caso contrário, o fluxo é laminar.

O fluxo turbulento tem tanto de complexo como de imprevisível. Vejamos um exemplo; quando passa um carro descapotável a grande velocidade repare no cabelo das pessoas que vão dentro. Em vez de estar todo para trás está para a frente. O espaço criado pela deslocação de ar por parte do carro tem que ser repostado. Surge uma pressão menor que é conhecida como efeito de aspiração.

Num fluido ideal essa reposição far-se-ia pelo ar lateral. Num fluido real a viscosidade do ar faz com que seja possível que a reposição se faça por ar de trás. Por isso é que os cabelos ficam para a frente.

As soluções empíricas que os animais descobriram para interagir com fluidos viscosos tem sido uma fonte muito grande de informação, tanto no voo como a nadar. Por exemplo, o voo dos insectos faz-se criando vórtices de ar. Este mecanismo de voo parece um convite à instabilidade e no entanto os insectos voam!

## 8.6 Tensão superficial

Num líquido real as forças de interacção inter-atómicas ou inter-moleculares são determinantes para as suas propriedades macroscópicas. Destas forças podemos distinguir dois subgrupos:

- a força de coesão é a que se exerce entre duas moléculas do fluido.
- a força de adesão é a que actua entre uma molécula do fluido e outra do reservatório.

Por exemplo, as moléculas que estão na superfície de um fluido são actuadas por forças de atracção por parte das suas vizinhas:

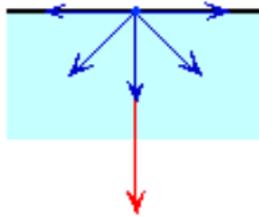


Figura 8.10: Superfície de separação de água líquida e de ar

No caso da água estas forças devem-se em grande parte às pontes de hidrogénio.

Ao contrário das moléculas do interior do líquido, a molécula não sofre forças atractivas vindas de cima porque só existem moléculas abaixo. A resultante das forças (a vermelho) é perpendicular à superfície do líquido nesse ponto. Nos pontos interiores do líquido a resultante das forças é nula:

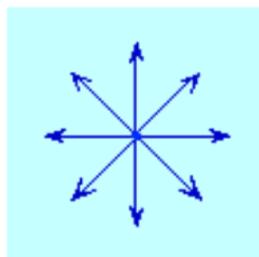


Figura 8.11: Resultante das forças no interior de líquido

Sempre que há uma interacção há Energia Potencial.

Podemos relembrar exemplos anteriores: a energia contida na interacção gravítica entre o nosso corpo e o planeta Terra é a Energia Potencial Gravítica; a energia contida na interacção entre duas cargas eléctricas é a Energia Potencial Eléctrica, etc.

A energia potencial presente na interacção entre as moléculas na superfície de um líquido por unidade de área é denominada de *Tensão Superficial*.

Na natureza as interacções tendem sempre para o estado de menor energia potencial. No caso de um fluido livre, o estado de menor energia é atingido quando a sua superfície tem a menor área possível, ou seja tem uma forma esférica:

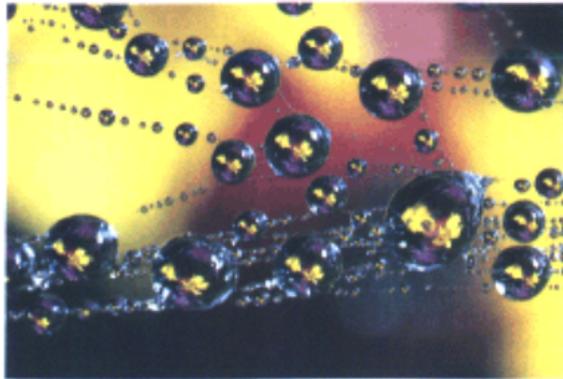


Figura 8.12: Gotículas de água numa teia

Quando um insecto poisa sobre o menisco de um líquido, ele altera este equilíbrio porque exerce uma pressão sobre o fluido. Esta alteração da energia potencial, faz-se sentir sob a forma de trabalho - o líquido sustenta o peso do insecto. Porquê?



Figura 8.13: Insecto pousado sobre superfície de água

O líquido procura a forma que lhe dá menor energia potencial. Quando o insecto deforma a superfície o líquido este tenta contrariar essa deformação aplicando uma força no insecto. O trabalho máximo que o líquido pode realizar por unidade de área é a tensão superficial. Uma das características especiais da água é a sua elevada tensão superficial.

Há aqui mais um facto importante: as moléculas da superfície podem interagir também com as moléculas das patas do insecto. Ou seja, além das forças de *coesão* temos que ter em conta as forças de *adesão*. A constituição das patas do insecto garantem que as forças de adesão são mínimas. Uma gota de água em contacto com uma superfície com elevadas forças de adesão (e.g. vidro) procura a forma de menor energia potencial e o resultado é:

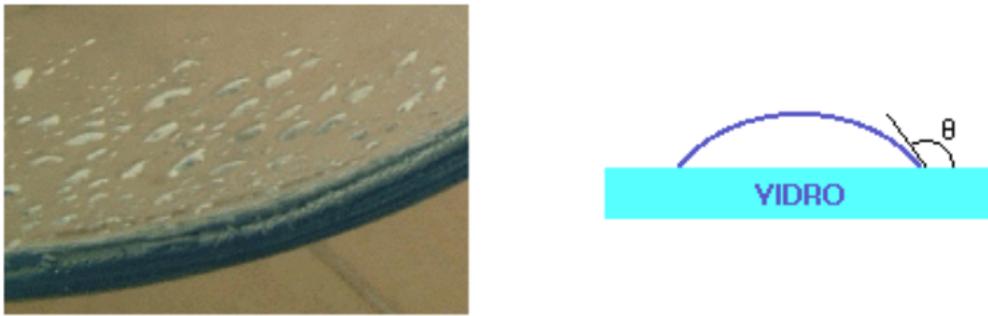


Figura 8.14: Gota de água sobre uma superfície de vidro

em vez de esférica a gota fica achatada porque as forças de adesão suplantam de as de coesão: Se a superfície for de uma substância com baixa força de adesão o resultado é:



Figura 8.15: Gota de água sobre uma superfície de uma folha de couve

## 8.7 Difusão

Consideremos a seguinte experiência:

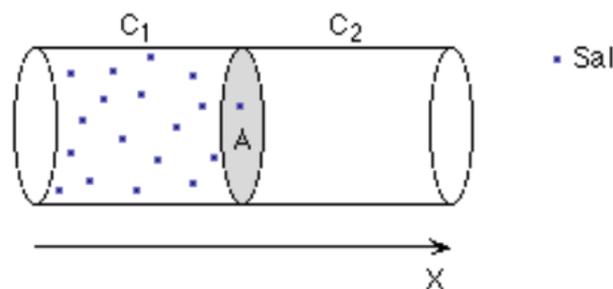


Figura 8.16: Experiência para observação de difusão

Um reservatório tem dois compartimentos separados por uma placa amovível. Inicialmente, o compartimento 1 tem água com corante azul e o compartimento 2 tem um volume igual de água sem corante.

Ao retirarmos a placa de separação podemos observar que há um movimento macroscópico de corante para o lado da água sem corante. Com o passar do tempo, a diferença de concentração de corante entre os dois compartimentos vai-se esbatendo até que eventualmente a concentração é praticamente homogênea entre os dois compartimentos.

Figura 8.17: Evolução da concentração segundo  $x$  ao longo do tempo

Que modelo poderá justificar este comportamento?

Suponhamos que as moléculas de água (escala microscópica) têm um movimento caótico. Ou seja, há moléculas de corante a deslocar-se em todas as direcções e sentidos. As colisões de moléculas de água entre si e com as moléculas de corante são aleatórias. O segundo Princípio da Termodinâmica permite prever (supondo que se trata dum sistema isolado) que o sistema irá evoluir no sentido de aumentar a entropia. Ou seja, ocorrerá um processo termodinâmico de um estado de organização inicial para um novo estado de desorganização máxima.

Este fenómeno designa-se de *Difusão* e permite-nos observar que o que acontece à escala microscópica pode ter influência sobre a evolução de um sistema à escala macroscópica. À escala macroscópica haverá um fluxo de corante de 1 para 2.

O fluxo de corante de 1 para 2 ( $j$ ) é o número de moles de moléculas de corante transferidas por unidade de área transversal por unidade de tempo (tem unidades de  $\text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ).

O fluxo será tanto maior quanto maior for a área transversal ( $A$ ) de separação dos dois compartimentos:

$$j \propto A$$

e quanto maior for a variação de concentração por unidade de comprimento ( $\Delta c/\Delta x$ ).

Será então dado por:

$$j = -DA \frac{\Delta c}{\Delta x} \quad (8.3)$$

em que  $D$  é o coeficiente de difusão.

O sinal de menos da equação indica que o fluxo será sempre no sentido de decréscimo espacial da concentração. Ou seja, far-se-á sempre de zonas com altas concentrações para zonas com baixas concentrações. Este facto é coerente com a observação de que as variações espaciais abruptas de concentração terão tendência a desaparecer.

Se tivermos em conta as unidades das grandezas da equação 8.3 podemos constatar que o coeficiente de difusão  $D$  tem unidades de  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

## 8.8 Osmose

Analizemos agora uma modificação da experiência anterior. Suponhamos que deformamos o cilindro do exemplo anterior e obtemos dois vasos comunicantes de acordo com a figura 8.18:

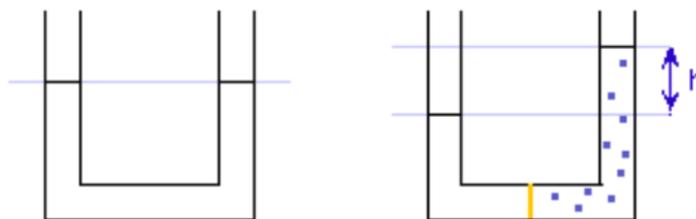


Figura 8.18: Reservatório cilíndrico separado por membrana

Se enchamos os vasos comunicantes com água formam-se duas colunas de água de igual altura (porque todos os pontos à mesma altura estão a igual pressão - equação fundamental da hidrostática).

No centro dos vasos comunicantes é colocada uma membrana (a amarelo) cujos poros são suficientemente grandes para permitir a passagem das moléculas de água mas suficientemente pequenos para impedir a passagem de moléculas de glucose.

Num dos lados deixamos glucose, logo surge uma diferença de concentração de soluções.

Se fosse possível haveria difusão das moléculas de glucose da direita para a esquerda. A presença da membrana evita que tal aconteça.

Há no entanto uma forma de minorar essa diferença de concentração. Se as moléculas de água se deslocarem em média da esquerda para a direita, a concentração da solução de glucose vai diminuir.

Cria-se assim um desnível entre o menisco de ambas as soluções ( $h$ ). Como sabemos, a este desnível corresponde uma pressão hidrostática a que chamamos *pressão osmótica*  $\Pi = \rho gh$ . Este fenómeno chama-se *osmose*.

Quanto maior for a concentração molar da solução de glucose ( $c$ ), maior será a pressão osmótica:

$$\Pi \propto c$$

Quanto maior for a temperatura ( $T$ ), maior será a pressão osmótica:

$$\Pi \propto T$$

A equação que contém essa informação é:

$$\Pi = cRT$$

em que  $R$  é a constante universal dos gases perfeitos e  $T$  é a temperatura absoluta.

A transferência do solvente que ocorre na osmose deve-se simplesmente ao facto da agitação térmica das moléculas de água presentes na solução ser dificultada pelas moléculas do soluto; enquanto que as moléculas de água sem soluto mantêm a agitação térmica. Daí vem que estas diferenças fazem-se sentir mais a temperaturas mais elevadas.