Capítulo 2

Conceitos úteis

2.1 Ordem de grandeza

2.1.1 Introdução

Qual é a ordem de grandeza do número 23? É da ordem das dezenas. Como é que sabemos? Porque está mais perto de 10 do que de 100?

E o número 99? Por um raciocínio análogo será da ordem das centenas porque está mais perto de 100 do que de 10?

A partir de que valor é que posso decidir que passei das dezenas para as centenas? Será o 50?

2.1.2 Definição

A ordem de grandeza de um número (n) é a potência de 10 com expoente inteiro (i) que melhor se aproxima de n.

Em notação matemática:

$$n \sim 10^i \tag{2.1}$$

Por exemplo, o número 23 é igual a $10^{1.36}$. Ou seja, 10^1 é a potência de 10 que melhor se aproxima de 23.

Dizemos então que 23 é da ordem de grandeza de 10^1. Em notação matemática:

$$23 \sim 10^1$$

Seguindo este raciocínio, o número a partir do qual passamos à ordem de grandeza seguinte será igual a $10^{1.5} \approx 31.6$ porque 1.5 já arredonda para 2.

Uma forma de generalizar este conceito pode ser através da modificação da equação (2.1):

$$i = [\log_{10}(n)] \tag{2.2}$$

em que [] representa o operador arredondamento.

2.1.3 Representação científica de um número

Uma outra forma de avaliar a ordem de grandeza de um número (n) envolve a adopção da notação científica.

Nesta notação n deve ter o seguinte formato:

$$n = m \times 10^k \tag{2.3}$$

em que m designa-se mantissa e k expoente.

A mantissa deve estar entre 1 e 10 (excluindo 10):

$$m \in [1, 10[\tag{2.4}$$

e o expoente deve ser inteiro:

$$k \in \mathbb{Z} \tag{2.5}$$

Alguns exemplos:

$$\begin{aligned}
23 &= 2.3 \times 10^1 \\
99 &= 9.9 \times 10^1 \\
0.012 &= 1.2 \times 10^{-2} \\
7230 &= 7.23 \times 10^3
\end{aligned}$$

2.1.4 Ordem de grandeza da mantissa

Podemos então subdividir o n em duas partes: m e 10^k. 10^k será uma primeira estimativa da ordem de grandeza de n.

Se $m \geq 10^{0.5} \approx 3.16$ irá contribuir com mais uma ordem de grandeza e concluímos que:

$$n \sim 10^{k+1} \tag{2.6}$$

Caso contrário $\left(m < 10^{0.5} \approx 3.16\right)$ ficamos pela estimativa inicial:

$$n \sim 10^k \tag{2.7}$$

Ou ainda, se $\log_{10} m \geq 0.5$ a ordem de grandeza de n será dada por (2.6). Se $\log_{10} m < 0.5$ a ordem de grandeza de n será dada por (2.7).

2.1.5 Comparação da ordem de grandeza de dois números

Consideremos dois números n_1 e n_2. Para compararmos as suas ordens de grandeza, temos que avaliar a ordem de grandeza de cada um deles:

$$\begin{cases} n_1 \sim 10^{i_1} \\ n_2 \sim 10^{i_2} \end{cases}$$

e avaliamos a diferença entre os expoentes i_1 e i_2. Se $i_1 > i_2$ então dizemos que n_1 é maior que n_2 em $i_1 - i_2$ ordens de grandeza. Isto é equivalente a dizer que a razão:

$$\frac{n_1}{n_2} \sim 10^{i_1 - i_2}$$

Ou seja que a ordem de grandeza de n_1 é maior que a ordem de grandeza de n_2 por um factor de $10^{i_1-i_2}$.

Em suma: quando estimamos a ordem de grandeza de um número fazêmo-lo apresentando uma potência de 10 (e.g. n é da ordem de 10^i); quando estimamos a diferença da ordem de grandeza entre dois números fazêmo-lo subtraindo os expoentes sem mencionar a base 10 (n_1 é maior que n_2 em $i_1 - i_2$ ordens de grandeza).

Note-se ainda que primeiro são avaliadas as ordens de grandeza de n_1 e n_2, e só depois é feita a diferença dos expoentes $i_1 - i_2$.

Podere-se-ia argumentar que uma alternativa seria calcular o valor da razão n_1/n_2 primeiro e só depois avaliar a ordem de grandeza desta razão. Esta abordagem não é correcta porque exige o cálculo explícito de uma divisão. Na primeira abordagem, essa estimativa de uma divisão reduz-se à avaliação de uma diferença entre dois números inteiros i_1 e i_2 (um cálculo mais simples que pode facilmente ser realizado mentalmente).

Vejamos um exemplo. Pretendemos estimar o número de batimentos do coração de uma pessoa terá sofrido ao longo dos seus 75 anos de vida, tendo em conta que o seu ritmo cardíaco médio foi de 70 batimentos por minuto. O ponto de partida é o ritmo médio:

$$\frac{70 \text{ bat}}{\text{min}}$$

Sabemos que se multiplicarmos esta quantidade por 1 ela permanecerá inalterada. Podemos escolher um factor unitário dado por uma razão de uma grandeza em minutos (min) sobre outra em horas (h).

Porquê? Porque assim modificamos a equação inicial de forma a obter o número de batimentos por hora a partir do número de batimentos por minuto:

$$\frac{70 \text{ bat}}{\cancel{\text{min}}} \times \frac{60\cancel{\text{min}}}{1\text{h}}$$

Como uma hora tem 60 minutos, sabemos que $\frac{60\text{min}}{1\text{h}} = 1$.

Se continuarmos este raciocínio sucessivamente para horas, dias (d) e anos (a), podemos chegar ao número total de batimentos:

$$\frac{70 \text{ bat}}{\cancel{\text{min}}} \times \frac{60 \cancel{\text{min}}}{1 \cancel{\text{h}}} \times \frac{24 \cancel{\text{h}}}{1 \cancel{\text{d}}} \times \frac{365.25 \cancel{\text{d}}}{1 \cancel{\text{a}}} \times 75 \cancel{\text{a}} \tag{2.8}$$

Em vez de realizarmos o cálculo explicitamente, podemos estimar a sua ordem de grandeza avaliando a ordem de grandeza de cada um dos factores e somando os expoentes. Sabemos que: $70 = 7 \times 10^1 \sim 10^2$, $60 = 6 \times 10^1 \sim 10^2$, $24 = 2.4 \times 10^1 \sim 10^1$, $365.25 = 3.6525 \times 10^2 \sim 10^3$ e $75 = 7.5 \times 10^1 \sim 10^2$ de acordo com as subsecções 2.1.2, 2.1.3 e 2.1.4:

$$10^2 \times 10^2 \times 10^1 \times 10^3 \times 10^2 \text{ bat}$$

Somando os expoentes obtemos uma ordem de grandeza do número total de batimentos cardíacos ao fim de 75 anos de vida.

Se tivéssemos calculado o produto (2.8) explicitamente, teríamos obtido 2.8×10^9 batimentos que é da ordem de 10^9 batimentos. A diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos (10^{10} e 10^9) não é significativa dada a natureza incerta do problema (o ritmo cardíaco varia ao longo da vida) e não justifica por isso a necessidade de realizar os cálculos explícitos.

O poder da estimativa de ordens de grandeza reside na sua simplicidade. É possível fazer estimativas facilmente a partir de poucos dados sem ser necessário o recurso a uma calculadora ou até mesmo a um papel e uma caneta. Temos no entanto que estar conscientes que é uma *estimativa*.

2.2 Percentagem

Como é que se representa um número no formato de percentagem? Para tal temos apenas de saber o significado do símbolo "%". Este símbolo representa um centésimo, ou seja:

$$\% = \frac{1}{100} \tag{2.9}$$

Se quisermos representar o número 5 sob a forma de uma percentagem temos apenas que multiplicar e dividir por 100. Em seguida se substituirmos $\frac{1}{100}$ por $\%$, de acordo com (2.9) obtemos:

$$5 = 5 \times 100 \times \frac{1}{100} = 500\%$$

A definição (2.9) também é suficiente para o processo inverso. Por exemplo:

$$2\% = 2 \times \frac{1}{100} = 0.02$$

Alguns exemplos:

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$
$$\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$
$$\frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$$

20% de 5 é:

$$20\% \times 5 = 20 \times \frac{1}{100} \times 5 = 1$$

2.3 Variação

A variação de uma grandeza pode ser apresentada sob várias formas: absoluta, relativa ou relativa percentual.

2.3.1 Variação absoluta

A variação absoluta da grandeza x (Δx) é dada pela diferença entre o valor final da grandeza (x_f) e o seu valor inicial (x_i):

$$\Delta x = x_f - x_i \tag{2.10}$$

Com a variação absoluta pretende-se saber por que parcela houve uma variação da grandeza.
Podemos facilmente demonstrar a partir da equação (2.10) que se a variação absoluta é:

- positiva ($\Delta x > 0$), x aumentou.
- nula ($\Delta x = 0$), x manteve-se inalterada.
- negativa ($\Delta x < 0$), x diminuiu.

2.3.2 Variação relativa

A variação relativa da grandeza x é obtida por comparação da variação absoluta com o valor inicial.

$$\frac{\triangle x}{x_i} \tag{2.11}$$

Com a variação relativa pretende-se saber por que factor houve uma variação da grandeza.
É de notar ainda o seguinte pormenor: se o valor inicial de x for negativo ($x_i < 0$) e a grandeza aumentar ($\Delta x > 0$), a variação relativa será negativa. Isto que dizer que segundo a definição (2.11) não podemos inferir a partir do sinal da variação relativa de uma grandeza se houve um aumento ou diminuição da mesma, tal como fizemos para a variação absoluta.

2.3.3 Variação relativa percentual

A variação relativa percentual é apenas uma forma diferente de representar a variação relativa de x (2.11):

$$\frac{\triangle x}{x_i} \times 100\% \tag{2.12}$$

Esta é a forma mais frequente e intuitiva de representar uma variação em laboratório.
Alguns exemplos:

- Se uma grandeza aumenta 100% então duplica:

$$\begin{gathered}\tfrac{\triangle x}{x_i} \times 100\% = 100\% \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tfrac{\triangle x}{x_i} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_f - x_i = x_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_f = 2x_i\end{gathered}$$

- Se uma grandeza diminui 50% então reduz-se a metade:

$$\begin{gathered}\tfrac{\triangle x}{x_i} \times 100\% = -50\% \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tfrac{\triangle x}{x_i} = -0.5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_f - x_i = -0.5x_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_f = 0.5x_i\end{gathered}$$

2.3.4 Factor de variação

A razão entre o valor final x_f e o valor inicial x_i é designada de factor (F):

$$F = \frac{x_f}{x_i}$$

Por exemplo, se uma grandeza duplica dizemos que aumenta por um factor de 2. Se uma grandeza reduz-se a metade dizemos que diminui por um factor de 0.5.

Podemos relacionar o factor de variação com a variação relativa:

$$\frac{\triangle x}{x_i} = \frac{x_f - x_i}{x_i} = F - 1 \tag{2.13}$$

Por exemplo, se uma grandeza aumenta 30%, a sua variação relativa é:

$$\frac{\triangle x}{x_i} = 30\% = 0.3 = F - 1$$

Neste caso dizemos que a grandeza aumenta por um factor de 1.3.

Quando o factor é inferior à unidade a variação relativa será negativa (grandeza diminui) e quando o factor é superior à unidade, a variação relativa será positiva (grandeza aumenta).